# 16차 통계물리 겨울학교

## $\phi^4$ field theory and the renormalization group

박수찬

2019년 1월 14일 ∼ 18일

가톨릭대학교

# Table of contents

1. Route to a Continuous Field

2. Diagrammatic Perturbation Theory

3. Renormalization

4. Rernomalization Group

5. Computation of Critical Exponents

# Route to a Continuous Field

# Hubbard-Stratonovich transformation

- Gaussian 적분

$$I(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^{N} d\phi_i \right) \exp \left[ \sum_{ij} \left( -\frac{1}{2} \phi_i \mathcal{K}_{ij} \phi_j + s_i \mathcal{K}_{ij} \phi_j \right) \right],$$

  where $\mathcal{K}$ is a real symmetric positive-definite matrix.

- 치환 적분 $\phi_i = \psi_i + s_i$ (note 참고)

$$\begin{aligned} I(\mathcal{S}) &= \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{ij} s_i \mathcal{K}_{ij} s_j \right) \int \left( \prod_{i} d\psi_i \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{ij} \psi_i \mathcal{K}_{ij} \psi_j \right) \\ &= \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\det \mathcal{K}}} \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{ij} s_i \mathcal{K}_{ij} s_j \right) \end{aligned}$$

# Hubbard-Stratonovich transformation (cont.)

## Hubbard-Stratonovich Transformation

$$\exp\left(\frac{1}{2}s_i\mathcal{K}_{ij}s_j\right) = \sqrt{\frac{\det\mathcal{K}}{(2\pi)^N}}\int d\Phi \exp\left(-\frac{1}{2}\phi_i\mathcal{K}_{ij}\phi_j + s_i\mathcal{K}_{ij}\phi_j\right).$$

- $d\Phi \equiv \prod_i d\phi_i$
- Einstein convention (반복되는 index에 대한 합)
- discrete variable $s \to$ continuous variable $\phi$
- $s$간의 상호작용을 $\phi$간의 상호작용으로 변경.
- $s$는 서로 독립적으로 처리 가능.

# Effective Hamiltonian for the $n$-vector model

- Hamiltonian

$$-\beta H = \frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{s_i}\cdot\boldsymbol{s_j} + \boldsymbol{h_i}\cdot\boldsymbol{s_i},$$

  where $\boldsymbol{s_i}$ is an $n$-dimensional vector with $|\boldsymbol{s_i}|^2 = 1$.

- $n = 1$ : Ising, $n = 2$ : XY, $n = 3$ : Heisenberg, $\cdots$.
- $\mathcal{K}_{ij} = K(2\alpha\delta_{ij} + \delta_{<i,j>,1})$
  - $< i, j >$는 $i$, $j$가 nn이면 1 아니면 0을 의미한다.
  - $\alpha$는 $\mathcal{K}$가 positive-definite 행렬이 되도록 하는 임의의 값이다.
  - $|\boldsymbol{s_i}|^2 = 1$ (상수)이므로, $\alpha$의 값은 물리에 영향을 주지 않는다.
- partition function

$$Z = \mathrm{Tr}\exp\left(\frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{s_i}\cdot\boldsymbol{s_j} + \boldsymbol{h_i}\cdot\boldsymbol{s_i}\right), \quad \mathrm{Tr} \equiv \prod_i \int d^n\boldsymbol{s_i}\delta(|\boldsymbol{s_i}| - 1).$$

# Effective Hamiltonian for the $n$-vector model (cont.)

- Hubbard-Stratonovich transformation

$$
\begin{aligned}
Z &= \left(\sqrt{\frac{\det \mathcal{K}}{(2\pi)^N}}\right)^n \mathrm{Tr} \int d\Phi \exp\left[-\frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{\phi_i}\cdot\boldsymbol{\phi_j} + \boldsymbol{s_i}\cdot(\underbrace{\mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{\phi_j} + \boldsymbol{h_i}}_{\mapsto \mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{\phi_j}})\right] \\
&= \left(\sqrt{\frac{\det \mathcal{K}}{(2\pi)^N}}\right)^n \mathrm{Tr} \int d\Phi \times \\
&\quad \times \exp\left[-\frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}(\boldsymbol{\phi_i} - \mathcal{K}^{-1}_{ik}\boldsymbol{h_k})\cdot(\boldsymbol{\phi_j} - \mathcal{K}^{-1}_{jm}\boldsymbol{h_m}) + \boldsymbol{s_i}\cdot(\mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{\phi_j})\right] \\
&= \left(\sqrt{\frac{\det \mathcal{K}}{(2\pi)^N}}\right)^n \int d\Phi \exp\left[-\frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{\phi_i}\cdot\boldsymbol{\phi_j} + \boldsymbol{h_i}\cdot\boldsymbol{\phi_i}\right] \times \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{K}^{-1}_{ij}\boldsymbol{h_i}\cdot\boldsymbol{h_j}\right) \mathrm{Tr} \exp\left[\boldsymbol{s_i}\cdot(\mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{\phi_j})\right]
\end{aligned}
$$

# Effective Hamiltonian for the $n$-vector model (cont.)

- surface area $S_{n-1}$ of $(n-1)$-sphere
  - solid angle in $n$ dimensions (note 참고)

$$d\Omega_n = \prod_{k=0}^{n-2} \sin^k \theta_k d\theta_k \Longrightarrow S_{n-1} = \int d\Omega_n = S_{n-2} \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta \, d\theta,$$

where $0 \le \theta_0 \le 2\pi$ and $0 \le \theta_i \le \pi$ $(i = 1, \ldots, n-2)$.

  - integral (Beta 함수에 대한 note 참고)

$$\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} = \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta \, d\theta (\leftarrow x = \sin^2 \theta, \, dx = 2\sqrt{x(1-x)}\, d\theta)$$

$$= \int_0^1 x^{(n-3)/2} (1-x)^{-1/2} dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$S_{n-1} = S_1 \prod_{k=3}^{n} \frac{S_{k-1}}{S_{k-2}} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

# Effective Hamiltonian for the $n$-vector model (cont.)

- trace 계산 ($\boldsymbol{a_i} = \mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{\phi_j}$).

$$\int d\boldsymbol{s} e^{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{a}_i}\delta(|\boldsymbol{s}|-1) = S_{n-2}\int_0^\pi \exp(a_i\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\, d\theta$$
$$= (2\pi)^{n/2} a_i^{1-n/2} I_{n/2-1}(a_i) \Rightarrow \mathrm{Tr}\cdots = (2\pi)^{nN/2}\prod_i w_{n/2-1}(a_i),$$

where $I_\nu(x)$ is the modified Bessel function and

$$w_\nu(z) \equiv z^{-\nu} I_\nu(z) = \frac{2^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\pi e^{z\cos\theta}\sin^{2\nu}(\theta)\, d\theta$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{2m}2^{-2m-\nu}}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \equiv A_\nu(z^2)$$

$w_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cosh(z)$. (Ising model. NB: analytic continuation)

# Effective Hamiltonian for the $n$-vector model (cont.)

- partition function ($\nu \equiv \frac{n}{2} - 1$)

$$\begin{aligned}\frac{Z e^{\frac{1}{2}\mathcal{K}^{-1}_{ij}\boldsymbol{h_i}\cdot\boldsymbol{h_j}}}{(\det\mathcal{K})^{n/2}} &= \int d\Phi\, e^{-\frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{\phi_i}\cdot\boldsymbol{\phi_j}+\boldsymbol{h_i}\cdot\boldsymbol{\phi_i}} \prod_i A_\nu\left(|\mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{\phi_j}|^2\right) \\ &= \int d\Phi\, e^{-\frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{\phi_i}\cdot\boldsymbol{\phi_j}+\boldsymbol{h_i}\cdot\boldsymbol{\phi_i}+\sum_i \ln A_\nu\left(|\mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{\phi_j}|^2\right)}\end{aligned}$$

- effective hamiltonian $\mathcal{H}$ and average

$$Z \equiv \int d\Phi \exp\left(-\mathcal{H}(\phi) + \boldsymbol{h_i}\cdot\boldsymbol{\phi_i} - \frac{1}{2}\mathcal{K}^{-1}_{ij}\boldsymbol{h_i}\cdot\boldsymbol{h_j}\right)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \sum_i \ln A_\nu\left(|\mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{\phi_j}|^2\right), \quad \mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{\phi_i}\cdot\boldsymbol{\phi_j}$$

$$\langle\mathcal{O}\rangle_{\mathcal{H}} \equiv \frac{1}{Z}\int d\Phi \mathcal{O}(\Phi) e^{-\mathcal{H}}$$

# Effective Hamiltonian for the $n$-vector model (cont.)

- (spontaneous) magnetization

$$\boldsymbol{m_i} \equiv \left. \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \boldsymbol{h_i}} \right|_{h=0} = \langle \boldsymbol{\phi_i} \rangle_{\mathcal{H}}.$$

- two-point correlation function (tensor)

$$G_{ij} \equiv \left. \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \boldsymbol{h_i} \partial \boldsymbol{h_j}} \right|_{h=0} = \langle \boldsymbol{\phi_i} \boldsymbol{\phi_j} \rangle_{\mathcal{H}} - \mathcal{K}_{ij}^{-1}$$

  $\mathcal{K}_{ij}^{-1}$는 $|i-j| \gg 1$이면 지수함수적으로 감소하므로 (note 참고),
  고비점(critical point) 근처에서는 아래와 같이 근사할 수 있다.

$$G_{ij} \approx \langle \boldsymbol{\phi_i} \boldsymbol{\phi_j} \rangle_{\mathcal{H}}$$

- $\phi$를 order parameter로 간주할 수 있다.

# Saddle point approximation and mean field theory

- Saddle point analysis (Let $\boldsymbol{\psi}_k \equiv \sum_n \mathcal{K}_{kn}\boldsymbol{\phi_n}$)

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\phi_i}} = \mathcal{K}_{ij}\boldsymbol{\phi_j} - 2\sum_{kn} \frac{A'_\nu(|\boldsymbol{\psi}_k|^2)}{A_\nu(|\boldsymbol{\psi}_k|^2)} \mathcal{K}_{ik}\mathcal{K}_{kn}\boldsymbol{\phi}_n = \boldsymbol{h_i}$$

- $A'_\nu = A_{\nu+1}/2$ 이므로, $\boldsymbol{\psi}_i = \boldsymbol{h}_i + \sum_k \frac{A_{\nu+1}(|\boldsymbol{\psi}_k|^2)}{A_\nu(|\boldsymbol{\psi}_k|^2)} \mathcal{K}_{ik}\boldsymbol{\psi}_k.$
- homogeneous solution for $h = 0$ (set $\psi_i = \psi_0$)

$$\psi_0 \approx \frac{nK}{2}(\alpha + d)\psi_0 - \frac{2K(\alpha+d)}{n^2(n+2)}\psi_0^3 + O(\psi_0^5)$$

$$\rightarrow K_c = \frac{2}{n(\alpha+d)}.$$

- $K_c$ depends on $\alpha$?

# continuum limit of $\mathcal{H}_0$

- $d$ dimensional lattice with index $i = \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$.
- $1 \leq x_i \leq N$
- 편의상 $N$은 홀수라고 하자.
- Fourier transformation

$$\phi_{\boldsymbol{x}} \equiv \frac{1}{\sqrt{N^d}} \sum_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \varphi_{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1, \ldots, n_d)$$

$$n_i = -\frac{N-1}{2}, \ldots, \frac{N-1}{2}$$

# continuum limit of $\mathcal{H}_0$ (cont.)

- effective Hamiltonian in the wavevector space

$$\sum_{\boldsymbol{y}} \mathcal{K}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{\sqrt{N^d}} \sum_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{k}} \underbrace{\left[ 2K\alpha + 2K \sum_{i=1}^{d} \cos(k_i) \right]}_{\equiv \Delta_0(\boldsymbol{k})}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \mathcal{K}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{y}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{k}'} \Delta_0(\boldsymbol{k}) \frac{1}{N^d} \sum_{\boldsymbol{x}} e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \Delta_0(\boldsymbol{k}) \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{-\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \Delta_0(\boldsymbol{k}) |\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{k}}|^2
\end{aligned}$$

- $\mathcal{K}$는 positive definite 행렬이므로 ($\alpha > d$), $\mathcal{H}_0$는 양수.

# continuum limit of $\mathcal{H}_0$ (cont.)

- 만약 $\varphi_{\boldsymbol{k}}$가 $\boldsymbol{k}$에 대한 연속함수(?!)라면,

$$2\mathcal{H}_0 = N^d \frac{1}{N^d} \sum_{\boldsymbol{k}} \Delta_0(\boldsymbol{k}) |\varphi_{\boldsymbol{k}}|^2 \overset{?}{\approx} N^d \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} \Delta_0(\boldsymbol{k}) |\varphi_{\boldsymbol{k}}|^2$$

$$= \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d^d \boldsymbol{\kappa}}{(2\pi)^d} \frac{\Delta_0(a_0 \boldsymbol{\kappa})}{a_0^2} \left| a_0 \sqrt{V} \varphi_{a_0 \boldsymbol{\kappa}} \right|^2 = \int^{\Lambda} \frac{d^d \boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} \Delta_f(\boldsymbol{k}) |\varphi_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{k})|^2$$

- $a_0$ : lattice constant, $\Lambda = \pi / a_0$ : cutoff, rename: $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{k} / a_0 \mapsto \boldsymbol{k}$

$$V \equiv N a_0^d, \quad \Delta_c(\boldsymbol{k}) \equiv \frac{\Delta_0(a_0 \boldsymbol{k})}{a_0^2}, \quad \varphi_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{k}) \equiv a_0 \sqrt{V} \varphi_{a_0 \boldsymbol{k}}$$

- 아래첨자 $f$는 (연속)함수임을 강조하기 위해 씀 (나중에 제거)
- $\varphi_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{k})$의 차원 $[\varphi_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{k})] = \Lambda^{-1-d/2} \doteq -1 - \frac{d}{2}$

# continuum limit of $\mathcal{H}_0$ (cont.)

- real space field

$$\phi_{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\sqrt{N^d}} \sum_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \varphi_{\boldsymbol{k}} \approx \sqrt{N^d} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \varphi_{\boldsymbol{k}}$$

$$= \sqrt{V} a_0^{d/2} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d^d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z}} \varphi_{a_0\boldsymbol{k}} = a_0^{-1+d/2} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d^d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z}} \varphi_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{k})$$

- Defining $\phi_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = a_0^{1-d/2} \phi_{\boldsymbol{x}/a_0}$ $(\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}/a_0)$, we get

$$\phi_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \varphi_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{k}), \quad \varphi_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^d x e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \phi_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$$

- $\phi_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$의 차원 $[\phi_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})] = \Lambda^{-1+d/2} \doteq -1 + \frac{d}{2}$.

# Discussion

1. $\boldsymbol{\varphi_f(k)}$는 연속함수이다? 이 말의 의미는, $Z$ 계산에서 $\boldsymbol{\varphi_f(k)}$가 연속함수인 경우의 contribution이 dominant하다는 의미이다. 이것은 선험적으로 (*a priori*) 알 수 없고, 계산결과가 물리현상을 설명하는 지를 보고 귀납적으로 (*a posteriori*) 판단할 수 밖에 없다.
2. 이 후 계산에서는 $\boldsymbol{\varphi_f(k)}$가 연속인 함수만으로 한정하여 $Z$를 계산하고, 그 때의 measure를 $\mathcal{D}\phi$라고 쓸 것이다.
3. 비슷한 맥락에서 $|\boldsymbol{k}|$가 작은 영역에서 $Z$ 계산에 dominant contribution이 나온다고 가정하면,

$$\Delta_0(k) \sim -\frac{K}{2}k^2 + 2K(\alpha + d)$$

로 근사할 수 있다. 이 근사하에서 cutoff $\Lambda$는 반드시 $\pi/a_0$라고 말 할 수 없게되어, continuum limit에서의 cutoff는 우리가 알 수 없는 값으로 간주해야만 한다.

# continuum limit : interaction term

- asymptotic behavior of $-\ln A_\nu(z^2)$

$$-\ln A_\nu(z^2) = \begin{cases} \text{const} - \dfrac{z^2}{2n} + \dfrac{z^4}{4n^2(n+2)} + O(z^6) & |z| \ll 1 \\ -|z| + O(\ln|z|) & |z| \gg 1 \end{cases}$$

- $|\phi|$가 큰 값인 경우는 $\ln A \sim |\phi|$ 이므로 $\mathcal{H}_0$가 dominant.
- $z^2$ term

$$\sum_{x} \left| \sum_{y} K_{x,y} \phi_y \right|^2 = \frac{1}{N^d} \sum_{x,k,k'} \Delta_0(k) \Delta_0(k') e^{i(k+k')\cdot x} \varphi_k \cdot \varphi_{k'}$$

$$= \sum_{k} \Delta_0(k)^2 |\varphi_k|^2$$

# continuum limit : interaction term (cont.)

- 전체 effective Hamiltonian의 $|\varphi|^2$ 항

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}} |\varphi_{\boldsymbol{k}}|^2 \Delta_0(\boldsymbol{k}) \left(1 - \frac{1}{n}\Delta_0(\boldsymbol{k})\right) + O(\varphi^4)$$

- $\Delta_0(0) > n$(즉, $K > n/[(2(\alpha + d)] = K_c$)이면, $|\varphi|^2$ 항으로만 이루어진 Gaussian 적분이 정의되지 않고, 반드시 $(|\varphi|^2)^2$ 이 필요하게 된다.
- $\Delta_0(0) > n$일 때 보이는 발산은 $|\varphi|$가 큰 값에서 등장하는 것인데, 이미 논의했듯이 $|\varphi|$가 크면 $\mathcal{H}_0$가 dominant하여 $Z$는 잘 정의되어 있으므로, 이 발산은 잘못된 근사의 결과일 뿐이다. 이런 의미에서 발산하지 않는 $Z$가 되도록 $\mathcal{H}$의 근사적인 형태를 잘 찾아야 한다.

# continuum limit : interaction term (cont.)

- (naive) continuum limit를 취하면,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int^{\Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\alpha_0^2 k^2 + \mu^2\right) |\boldsymbol{\varphi_f(k)}|^2 + O(|\varphi_f(k))|^2)^2$$

$$\alpha_0^2 = K\left(\frac{2K(\alpha+d)}{n} - \frac{1}{2}\right),\ \mu^2 = \frac{2K(\alpha+d)}{a_0^2}\left(1 - \frac{2K(\alpha+d)}{n}\right).$$

- mean field critical point $\mu^2 = 0 \to K_c = n/[2(\alpha+d)]$.
- $\alpha$는 임의의 값이므로 $\mu^2$ 역시 우리가 알 수 없는 값으로 간주해야 함.
- $\mu^2 \propto T - T_0$ ($T_0$ : mean field critical point).
- $K \simeq K_c$에서 $\alpha_0^2 > 0$. $\alpha_0^2$이 작은 $K$에서 음수처럼 보이는 것은 $\cos$ 함수의 전개에서 나온 artifact이다. 우리는 $K = K_c$에서 관심이 있으므로 $\alpha_0^2$은 항상 양수로 간주해도 무방하다.

# continuum limit : interaction term (cont.)

- $z^4$ term $\approx \sum_x (|\phi_x|^2)^2$. 계수는 양수.
- total Hamiltonian ($\alpha_0$를 $\alpha$라고 쓰고, 아래첨자 $f$ 제거)

$$\mathcal{H} = \int d^d x \left[ \frac{1}{2}\alpha^2 \left|\nabla \boldsymbol{\phi}\right|^2 + \frac{1}{2}\mu^2 |\boldsymbol{\phi}|^2 + \frac{\lambda}{4!}(|\boldsymbol{\phi}|^2)^2 \right]$$

- partition function

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\boldsymbol{\phi} \exp\left[ -\mathcal{H} + \int \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \, d^d x \right]$$

- $\alpha$, $\mu$, $\lambda$를 **bare parameter**라고도 부른다.
- higher order term을 무시할 수 있는 이유는 차후에 논의함.
- 이후의 논의에서 $\phi$는 scalar field (즉, Ising model)만 고려함.
- bare parameter와 $\Lambda$는 알 수 없는 값이므로, 이 들과 무관한 이론을 만들려고 한다. ($\Lambda \to \infty$일 때 의미있는 이론 만들기)

# Dimensional analysis: canonical (engineering) dimension

- $\mathcal{H}$는 차원이 없는 수이어야만 한다. $[\mathcal{H}] = 0$
- $\alpha$는 적분변수의 치환으로 항상 차원이 없는 수로 둘 수 있다. $[\alpha] = 0$
- $[\mu^2] = [\nabla^2] = 2$.
- $\phi(x)$의 차원 : $0 = \left[\int d^d x |\nabla\phi|^2\right] = -d + 2 + 2[\phi] \Rightarrow [\phi] = \frac{d}{2} - 1$
- source $J(x)$의 차원 : $0 = -d + [\phi] + [J(x)] \rightarrow [J(x)] = 1 + \frac{d}{2}$
- $\lambda$의 차원 : $0 = -d + [\lambda] + 4[\phi] \rightarrow [\lambda] = \mathbf{4 - d}$.
- momentum space field $\varphi(\boldsymbol{k})$의 차원

$$[\varphi(\boldsymbol{k})] = \left[\int d^d x e^{-i\boldsymbol{k}\cdot x}\phi(\boldsymbol{x})\right] = -d - 1 + \frac{d}{2} = -\frac{d}{2} - 1$$

- $\lambda_{s,r}\int d^d x(\nabla)^s\phi^r$의 항이 있는 경우, $[\lambda_{s,r}] = d + r - \frac{1}{2}rd - 2s$

# 차원분석과 critical exponents

- mean magnetization $\langle\phi\rangle$
  - $\langle\phi\rangle$은 $\mu$와 $\lambda$의 함수.
  - $\phi$의 차원은 $-1+d/2$이므로, $\langle\phi\rangle \propto 1/\sqrt{\lambda}$.
  - $\sqrt{\lambda}\phi$의 차원은 1이므로 $\mu$와 비례
  - $\mu^2 = T - T_0$이므로 $\langle\phi\rangle \propto \sqrt{|T-T_0|} \to \beta = \frac{1}{2}$
- correlation length $\xi$
  - $\xi$의 차원은 $-1$이므로 이 차원을 만들 수 있는 조합은 $\mu^{-1}$.
  - $\xi \propto |T-T_0|^{-1/2} \to \nu = \frac{1}{2}$
- equation of state at the critical point
  - $J$는 $\lambda$와 $\phi$의 함수.
  - $[J/\phi] = 2$이고 $[\lambda\phi^2] = 2$.
  - 따라서 가능한 조합은 $J \propto \phi^3 \to \delta = 3$

# 차원분석과 critical exponents (cont.)

- susceptibility $\chi \propto \dfrac{d\phi}{dJ}$
  - $\chi$의 차원은 $[\phi] - [J] = -2$.
  - $\mu$, $\lambda$로 차원 $-2$를 만들 수 있는 조합은 $\mu^{-2} \to \chi \propto |T - T_0|^{-1}, \gamma = 1$.
- correlation function $G_c(x) = \langle \phi(x)\phi(0) \rangle$ at the critical point
  - $G_0$는 $x$, $\lambda$, $\langle\phi\rangle$의 함수 ($\langle\phi\rangle = 0$ at the critical point).
  - $\lambda$는 $\langle\phi\rangle$와 곱의 형태로만 등장하므로 $G_0$는 $x$만의 함수
  - $[G_0] = d - 2$이므로 $G_0 \propto 1/r^{d-2} \to \eta = 0$
- specific heat $c_v \propto \langle (\delta\mathcal{H})^2 \rangle$
  - $[\mathcal{H}] = 0$이므로 $[c_v] = 0$. 따라서 $c_v \propto \mu^0 \to \alpha = 0$.
- 위의 차원 분석을 틀리게 하는 요인은 무엇인가? (혹은 effective Hamiltonian은 critical behavior를 제대로 설명할 수 없나?)

# Diagrammatic Perturbation Theory

# Notations

- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ : $d$-dimensional real space vector. (함수 $\widetilde{J}$, $\widetilde{\phi}$, $\widetilde{\varphi}$)
- $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ : $d$-dimensional wavevector. (함수 $J$, $\phi$, $\varphi$)
- $kx \equiv \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}$ (vector표시를 생략하기도 함)
- $n$-point correlation function

$$\widetilde{G}^{(n)}(1, \cdots) \equiv \widetilde{G}^{(n)}(\boldsymbol{x_1}, \cdots),$$
$$G^{(n)}(\pm 1, \cdots) \equiv G^{(n)}(\pm \boldsymbol{k_1}, \cdots)$$

- wavevector를 momentum이라고 부를 것임.
- momentum space에서 주로 계산할 예정이라 real space 함수에 tilde기호를 붙임.
- 편의에 의해 tilde 기호를 무시하고 계산하기도 할 것임.

# Notations (cont.)

- real space integral

$$\int_x \equiv \int d^d\boldsymbol{x}, \quad \int_{xy} \equiv \int d^d\boldsymbol{x} d^d\boldsymbol{y}, \quad \int_x^{1,2} \equiv \int d^d\boldsymbol{x_1}\, d^d\boldsymbol{x_2},$$

$$\widetilde{f} \circ \widetilde{g} = \int_x \widetilde{f}(\boldsymbol{x})\widetilde{g}(\boldsymbol{x}), \quad \widetilde{f} \circ \Delta \circ \widetilde{g} \equiv \int_{xy} \widetilde{f}(\boldsymbol{x})\Delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\widetilde{g}(\boldsymbol{y}).$$

- momentum space integral

$$\int_k \equiv \int^\Lambda \frac{d^d k}{(2\pi)^d}, \quad \int_k^{1,2} \equiv \int^\Lambda \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d}\frac{d^d k_2}{(2\pi)^d}$$

$$f \circ g = \int_k f(-\boldsymbol{k})g(\boldsymbol{k}), \quad f \circ \Delta \circ g = \int_k f(-\boldsymbol{k})\Delta(\boldsymbol{k})g(\boldsymbol{k}).$$

- cutoff $\Lambda$가 항상 있음에 유의 (momentum 적분은 sphere에서 함)
- $\Lambda = \infty$인 경우에도 사용할 것임

# Notations (cont.)

- functional derivative : (맥락이 명확하면 tilde기호 생략하기도 함)

$$\widetilde{D}(x) \equiv \frac{\delta}{\delta \widetilde{J}(\boldsymbol{x})}, \quad D(k) \equiv (2\pi)^d \frac{\delta}{\delta J(-\boldsymbol{k})} \text{ :부호에 주의}$$

- delta function

$$\delta_k(1-2+\cdots+n) \equiv (2\pi)^d \delta\left(\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_2}+\cdots+\boldsymbol{k_n}\right)$$

- delta function 사용 예

$$\int_x e^{i(k_1-k_2)x} = \delta_k(1-2),$$

$$\int_k^1 \phi(\boldsymbol{k_1})\delta_k(1-2) = \phi(\boldsymbol{k_2}).$$

# Partition function with source $J$

- Gaussian theory

$$Z_G[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[-\mathcal{H}_G + \widetilde{J} \circ \widetilde{\phi}\right], \mathcal{H}_G = \frac{1}{2}\int_x \left(\alpha^2 \left|\nabla\widetilde{\phi}\right|^2 + \mu^2\widetilde{\phi}^2\right).$$

- Gaussian theory에서는 $\mu^2 > 0$이어야만 됨.
- Ginzburg-Landau theory ($\phi^4$ theory)

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{H}+\widetilde{J}\circ\widetilde{\phi}}, \mathcal{H} = \mathcal{H}_G + V_I,\ V_I = \frac{\lambda}{4!}\int_x \widetilde{\phi}^4.$$

- $\mu^2$은 음수가 될 수도 있지만, 보통 제곱을 포함하여 기호를 쓴다.
- $\lambda > 0$이다. ($\lambda < 0$이면 $\phi^6$이 필요함: tricritical phenomena)

# Partition function with source $J$ (cont.)

- notation: functional $Z$의 argument에 tilde기호를 제외하고 사용
- notation: measure를 나타낼 때도 tilde를 사용하지 않음.
- ($n$-point) correlation functions

$$\widetilde{G}_J^{(n)}(1,\ldots,n) = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi \left[\prod_{i=1}^{n}\widetilde{\phi}(\boldsymbol{x_i})\right] e^{-\mathcal{H}+\widetilde{J}\circ\widetilde{\phi}}$$

$$= \frac{1}{Z[J]}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\delta}{\delta\widetilde{J}(\boldsymbol{x_i})}\right) Z[J] = \frac{1}{Z[J]}\left(\prod_{i=1}^{n}\widetilde{D}(x_i)\right) Z[J].$$

- $J=0$일 때의 correlation function은 $\widetilde{G}^{(n)}$으로 표시.

$$\widetilde{G}^{(n)}(1,\ldots,n) = \frac{1}{Z[J=0]}\left(\prod_{i=1}^{n}\widetilde{D}(x_i)\right) Z[J]\Big|_{J=0}$$

# Partition function with source $J$ (cont.)

- functional derivative

$$\frac{\delta Z[J(\boldsymbol{x})]}{\delta J(\boldsymbol{x_0})} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Z[J(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})] - Z[J(\boldsymbol{x})]}{\varepsilon}$$

- 적분($\int_x$)을 합($\sum_x$)으로 간주하고 보통의 미분을 한 후, 다시 합을 적분으로 변경하면 보통 맞는 결과가 나온다.

$$\widetilde{D}(z) \int_{xy} \widetilde{J} \Delta \widetilde{J} \longmapsto \partial_i \sum_{jk} \widetilde{J}_j \Delta_{jk} \widetilde{J}_k = \sum_{jk} \left[ \delta_{ij} \Delta_{jk} \widetilde{J}_k + \widetilde{J}_j \Delta_{jk} \delta_{ik} \right]$$

$$= \sum_j \left[ \Delta_{ij} + \Delta_{ji} \right] \widetilde{J}_j \longmapsto \int_x \left[ \Delta(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) + \Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \right] \widetilde{J}(x)$$

# Partition function with source $J$ (cont.)

- $\nabla$는 finite difference로 바꿔서 미분하면 됨.

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\int_x(\nabla\phi)^2 \longmapsto \frac{\partial}{\partial\phi_i}\sum_j(\phi_j-\phi_{j+1})^2$$
$$= -2(\phi_{i+1}+\phi_{i-1}-2\phi_i) \longmapsto -2\nabla^2\phi$$

- $\delta_{i,j}$는 delta 함수로 변경하면 됨.

$$\frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)} \longmapsto \frac{\partial\phi_j}{\partial\phi_i} = \delta_{i,j} \longmapsto \delta(x-y)$$

- 주로 사용할 계산

$$\frac{\delta e^{F[J]}}{\delta J} = e^{F[J]}\frac{\delta F[J]}{\delta J}, \quad \frac{\delta}{\delta J(y)}\int_x J(x)^r K(x) = rJ(y)^{r-1}K(y)$$

# Partition function with source $J$ (cont.)

- connected correlation function (cumulant)

$$\widetilde{G}^{(n)}_{Jc}(x_1,\ldots,x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n}\widetilde{D}(x_i)\right)\ln Z[J],$$

$$\widetilde{G}^{(n)}_{c}(x_1,\ldots,x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n}\widetilde{D}(x_i)\right)\ln Z[J]\Big|_{J=0}.$$

- generating functional of the correlation functions

$$\frac{Z[J]}{Z[J=0]} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{x}^{1\sim n}\widetilde{G}^{(n)}(1,\ldots,n)\prod_{k=1}^{n}\widetilde{J}(\boldsymbol{x_k}),$$

$$\ln Z[J] = \ln Z[J=0]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{x}^{1\sim n}\widetilde{G}^{(n)}_{c}(1,\ldots,n)\prod_{k=1}^{n}\widetilde{J}(\boldsymbol{x_k}).$$

# Free theory : gaussian partition function

- Fourier transformation $\widetilde{f}(\boldsymbol{x}) = \int_k e^{ikx} f(\boldsymbol{k})$

$$\widetilde{J} \circ \widetilde{\phi} = \int_{pq} J(\boldsymbol{p})\phi(\boldsymbol{q}) \int_x e^{i(p+q)x} = \int_k J(-\boldsymbol{k})\phi(\boldsymbol{k}) = J \circ \phi,$$

$$\mathcal{H}_G = \frac{1}{2}\int_k \left(\alpha^2 k^2 + \mu^2\right) \phi(\boldsymbol{k})\phi(-\boldsymbol{k}) \equiv \frac{1}{2}\phi \circ \Delta^{-1} \circ \phi,$$

- gaussian partition function (note that $\phi(-k) = \phi(k)^*$)

$$Z_G[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{ - \int_k \frac{1}{2\Delta(k)} \left[\phi(-k)\phi(k) - 2J(-k)\Delta(k)\phi(k)\right] \right\}$$

# Free theory : gaussian partition function (cont.)

- 치환 적분: $\phi(k) \mapsto \phi(k) + J(k)\Delta(k)$

$$Z_G[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_k \frac{\phi(-k)\phi(k)}{\Delta(k)}\right\} \exp\left[\frac{1}{2} J \circ \Delta \circ J\right]$$
$$= Z_G[0] \exp\left[\frac{1}{2}\widetilde{J} \circ \Delta \circ \widetilde{J}\right],$$

where (note 참고) $\Delta(x,y) = \int_k \frac{e^{ik(x-y)}}{\alpha^2 k^2 + \mu^2} \sim \frac{e^{-\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|/\alpha}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{(d-1)/2}}$,

$$Z_G[0] \propto \exp\left[-\frac{V}{2}\int_k \ln(\alpha^2 k^2 + \mu^2)\right]$$

- NB: $\ln\det A = \mathrm{Tr}\ln A$
- correlation function을 계산할 때, $Z_G[0]$는 영향이 전혀 없으므로, 보통 $Z_G[J=0] = 1$이 되도록 규격화상수를 곱한다.

# Free theory : gaussian partition function (cont.)

- connected correlation function for the Gaussian model

$$\widetilde{G}^{(1)}_{Jc}(x) = \widetilde{D}(x) \ln Z_G[J] = \int_z \Delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\widetilde{J}(\boldsymbol{z}),$$
$$\widetilde{G}^{(2)}_{Jc}(x,y) = \widetilde{D}(x)\widetilde{D}(y) \ln Z_G = \Delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$
$$G^{(n)}_{Jc} = 0 \text{ for } n \geq 3.(\text{gaussian만의 특별한 성질})$$

- propagator : $G^{(2)}_c$ of a general model
- bare (free) propagator : $G^{(2)}_c$ of the gaussian model
  - real space에서의 bare propagator $\Delta$
  - momentum space에서의 bare propagator $\Delta(k) = \dfrac{1}{\alpha^2 k^2 + \mu^2}$
- NB: 나중에 Feynman diagram을 분석할 때, bare propagator를 편의상 propagator라고 부른다.

# Ginzburg-Landau theory : perturbative expansion

- partition function

$$
\begin{aligned}
Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{H}_G + J\circ\phi} e^{-V_I} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{H}_G + J\circ\phi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-V_I)^n}{n!} \\
&\overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{H}_G + J\circ\phi} \left(-V_I[\widetilde{\phi}]\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-V_I[\widetilde{D}]\right)^n \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{H}_G + J\circ\phi} \\
&= \exp\left(-V_I[\widetilde{D}]\right) Z_G[J] = \exp\left(-V_I[\widetilde{D}]\right) \exp\left(\frac{1}{2}\widetilde{J}\circ\Delta\circ\widetilde{J}\right)
\end{aligned}
$$

- $Z_G[J=0]=1$인 규격화 사용.
- Does this series converge?

# Ginzburg-Landau theory : perturbative expansion (cont.)

- for example, zero dimensional case

$$Z(\lambda) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2-\lambda x^4/4} \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n Z_n,$$

$$Z_n = \frac{1}{4^n} \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} x^{4n} = \frac{(4n)!}{n! 16^n (2n)!} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{4n}{e}\right)^n$$

$n \geq 2$이면 $Z_n > n!$ (note 참고). The series diverges!?

> *The divergent series are the invention of the devil, and it is a shame to base on them any demonstration whatsoever. By using them, one may draw any conclusion he pleases and that is why these series have produced so many fallacies and so many paradoxes.* Niels Henrik Abel

# Ginzburg-Landau theory : perturbative expansion (cont.)

- Do you know $1+2+3+\cdots \overset{!}{=} -\frac{1}{12}$? (Casimir force is attractive)
- perturbation 이론은 틀렸나?
  - 부분합과의 오차 $R_M$ 고려

$$R_M \equiv \left| Z(\lambda) - \sum_{n=0}^{M} (-\lambda)^n Z_n \right|$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left| e^{-\lambda x^4/4} - \sum_{n=0}^{M} \frac{1}{n!} \left( -\frac{\lambda x^4}{4} \right)^n \right|$$

  - Taylor 전개의 성질

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{M} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^M}{M!} f^{(M)}(t)\, dt \right| \leq K_M \frac{x^{M+1}}{(M+1)!}.$$

단, $K_M$ 은 적분 구간에서 $|f^{(M)}(t)|$의 최댓값.

# Ginzburg-Landau theory : perturbative expansion (cont.)

- $e^{-x} \leq 1$이므로,

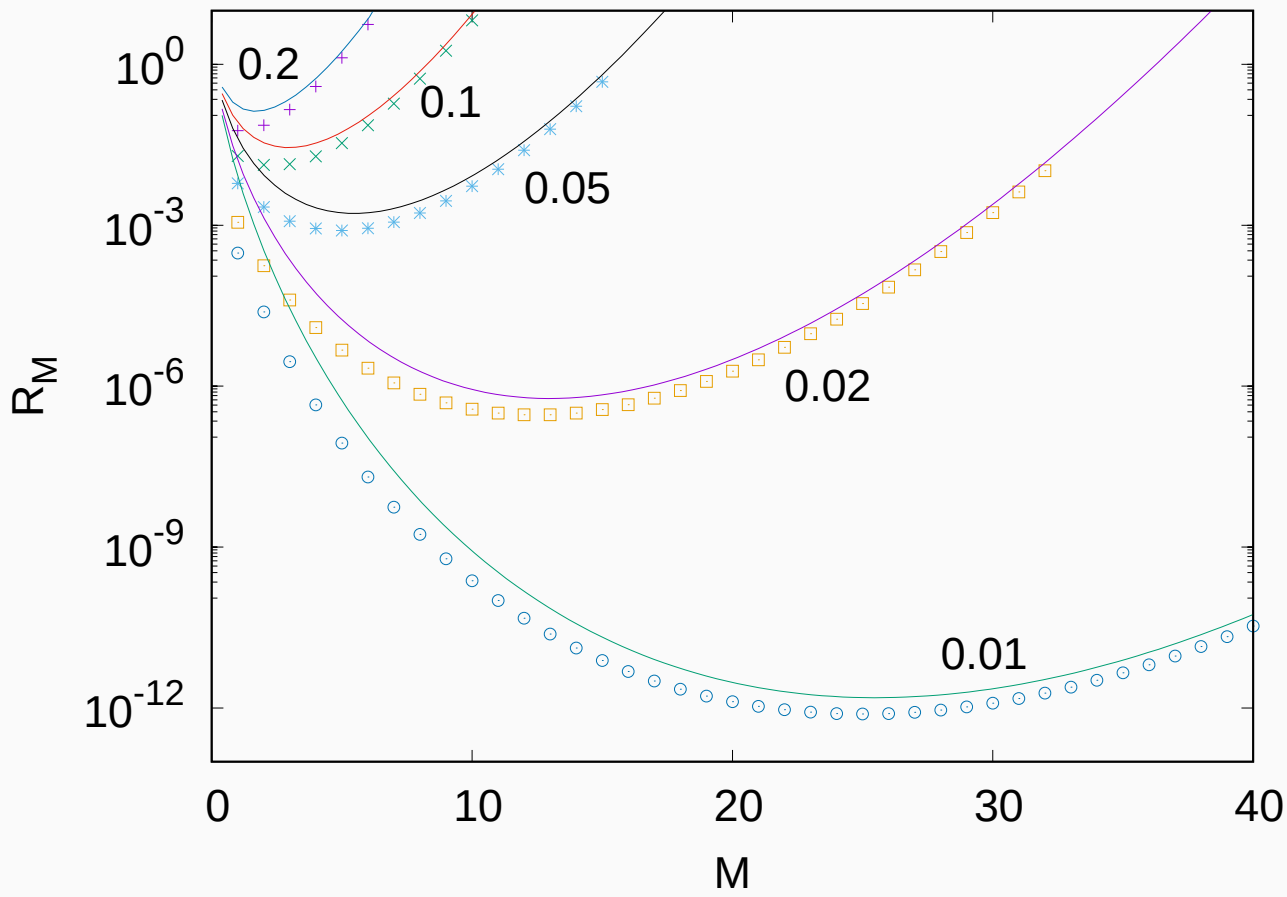
$$R_M \leq \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x^2/2}}{(M+1)!} \left(\frac{\lambda x^4}{4}\right)^{M+1}$$
$$= \lambda^{M+1} Z_{M+1} \sim \frac{1}{\sqrt{M\pi}} \left(\frac{4\lambda M}{e}\right)^{M}$$

- $4\lambda M \approx 1$일 때 $R_M \approx e^{-1/(4\lambda)}$ (minimum).

- $M$이 엄청 크지 않으면 괜찮다. (asymptotic series가 convergent series보다 많은 경우 적은 노력으로 더 좋은 결과를 준다.)
- Stirling's formula, steepest descent method, Rayleigh-Schrödinger 섭동론 등 물리의 대부분의 근사는 convergent series가 아니고 asymptotic series를 다룬다.
- complete graph에서의 Ising model도 asymptotic 방식으로 해결한다 (note 참고)

# Ginzburg-Landau theory : perturbative expansion (cont.)

- 수치계산



# Ginzburg-Landau model : Feynman diagrams

- double Taylor expansion (편의상 tilde기호 생략)

$$Z[J] = \sum_{V=0}^{\infty} \frac{1}{V!} \left( -\frac{\lambda}{4!} \int_z D(z)^4 \right)^V \sum_{P=0}^{\infty} \frac{1}{P!} \left( \frac{1}{2} J \circ \Delta \circ J \right)^P$$
$$= \sum_{V,P=0}^{\infty} \frac{1}{V!P!} \left( -\frac{\lambda}{4!} \right)^V \left( \frac{1}{2} \right)^P \left( \int_z D(z)^4 \right)^V (J \circ \Delta \circ J)^P$$

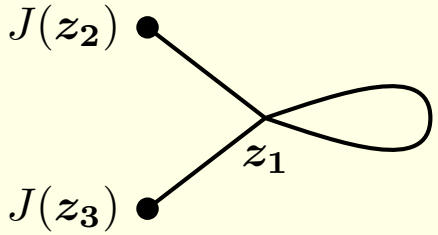
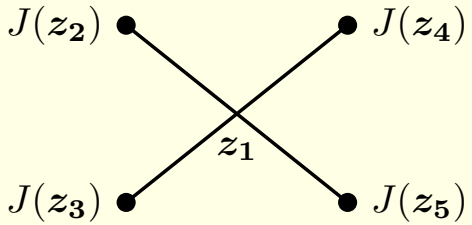
- $\lambda$(vertex)가 $V$개, $\Delta$(propagator)가 $P$개 있는 항들의 합으로 해석
- $D^{4V} J^{2P}$의 총 항의 개수 $N_1 \equiv \binom{2P}{4V} (4V)! = \frac{(2P)!}{E!}$
- $E = 2P - 4V$ : 미분 후 남는 $J$의 개수. external point라고 부름.
- 여러 항들이 같은 결과를 줄 것이므로 이들을 묶어서 고려할 것임.
- 미분 결과를 그림(Feynman diagram)으로 표시할 수 있다.

# Ginzburg-Landau model : Feynman diagrams (cont.)

- $P$개의 $J \bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet J$ , $V$개의 를 그린다.
- 중 한 선분과 $J \bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet J$ 중 하나의 $J$-blob (•)을 연결하여 vertex에 모든 선분이 $J$-blob에 연결되는 가능한 모든 diagram들을 만든다. 연결된 $J$-blob의 경우에는 blob을 지운다.
- 만들어진 diagram에서 모든 꼭지점과 모든 $J$-blob에 적당한 변수를 쓰고, 각 선분 (곡선으로 그려도 상관없음. link라고도 부름)에는 양 끝점을 argument로 하는 $\Delta$를 쓴다.
- 선분의 경우, 양 끝점이 같을 수도 있음에 유의한다.
- 꼭지점의 $\int_z$, $J$-blob의 $\int_z J(z)$, 그리고 각 선분의 $\Delta$를 모두 곱하면 diagram에 대응하는 적분식이 만들어진다.
- diagram이 분리된 (disconnected) 경우에는 각 diagram의 부분에 대한 적분을 쓰고 단순히 곱하면 된다.

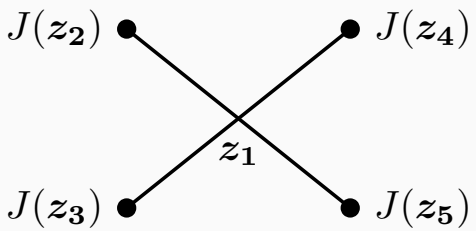
# Ginzburg-Landau model : Feynman diagrams (cont.)

- $V = 1$인 예 ( $J$ ●——● $J$ 가 남지 않는 경우만 그림)

| $P$ | diagram | 적분 |
|---|---|---|
| 2 | | $\int_z \Delta(z-z)^2$ (vacuum bubble) |
| 3 |  | $\int_z^{1\sim 3} \Delta(z_1 - z_1) \prod_{k=2}^{3} \Delta(z_1 - z_k) J(z_k)$ |
| 4 |  | $\int_z^{1\sim 5} \prod_{k=2}^{5} \Delta(z_1 - z_k) J(z_k)$ |

# Symmetry factor (SF): diagram의 계수 구하기

- (naive) consideration: $P$개 선분과 $V$개의 꼭짓점이 있는 diagram이 있을 때, diagram의 적분이 같은 경우수를 따져보자.
  - 각 꼭짓점에서 미분을 다르게 해도 같은 diagram이다: $4!$의 경우의 수
  - 각 꼭짓점을 옮겨도 같은 diagram이다 : $V!$의 경우의 수
  - 한 미분과 연결된 source($J$)를 다르게 해도 같은 diagram이다 : $2!$의 경우의 수
  - 선분을 옮겨도 같은 diagram이다 : $P!$의 경우의 수
  - 따라서 총 경우의 수는 $N_2 \equiv V!P!(4!)^V(2!)^P$으로 분모의 수와 같다.
- 그러나 (예를 들어) 미분을 다르게 배열하는 경우와 $\Delta$를 다르게 배열하는 경우에 같은 diagram이 될 수도 있어서 위의 과정은 경우의 수를 overcounting할 수 있다.



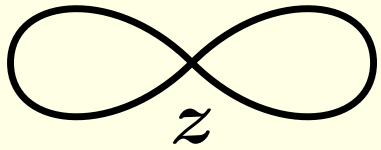
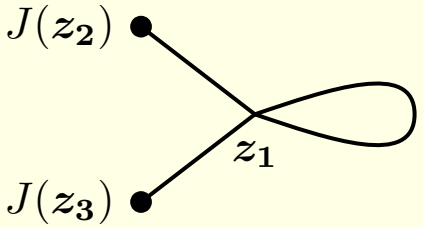
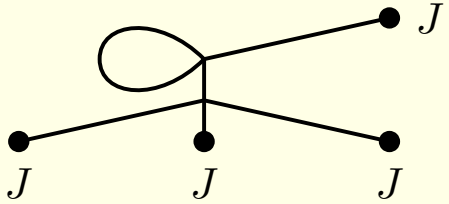
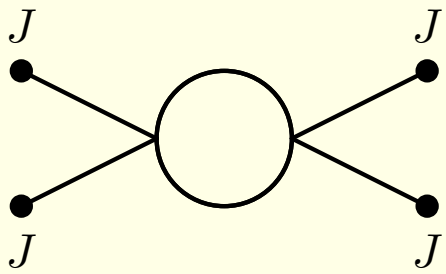
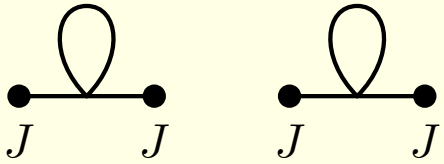
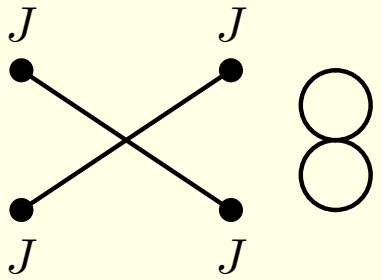

미분 배열 ($4!$)과 $\Delta$ 배열($4!$)은 같은 결과를 준다. $4!$이 overcounting 됨.

# Symmetry factor (SF): diagram의 계수 구하기 (cont.)

- 중첩되는 경우의 수는 diagram의 대칭성과 관련이 있다.
- 이 중첩되는 경우의 수를 symmetry factor(SF)라고 부른다.
- 어떤 diagram의 SF가 $S$이면 적분식 앞에 $1/S$를 곱한다.
- $S$는 link, vertex, $J$-blob을 swap하여도 같은 diagram이 되는 경우수와 같다.
- $\frac{1}{4!}$과 $\frac{1}{2}$이 곱해졌기 때문에, SF를 찾는 것만으로 계수를 찾을 수 있게 만들어 준다.
- 같은 모양의 $k$개의 sub-diagram들로 이루어진 disconnected diagram의 경우에는 $k!$이 SF에 포함된다.
- 마지막으로 $(-\lambda)^V$을 곱한다.
- 위의 방식으로 diagram의 적분식을 찾는 것을 Feynman rule이라고 부른다.

# Symmetry factor (SF): diagram의 계수 구하기 (cont.)

- Example

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $2^3$ | $2! \times 2!$ | $3! \times 2!$ |
|  |  |  |
| $2! \times 8$ | $2! \times 2^4$ | $4! \times 8$ |

- 주어진 $P$, $V$에 대하여 모든 diagram들의 $1/S$의 합은 $N_1/N_2$와 같다.

# Free energy $\mathcal{W}[J]$

- $Z[J]$ : 모든 가능한 diagram들의 합
- 어떤 diagram $G_i$가 $n_j$개의 connected diagram $C_j$ 들로 표현되는 경우, Feynman rule에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$G_i = \prod_j \frac{(C_j)^{n_j}}{n_j!} \rightarrow Z = \sum_i G_i = \prod_j \sum_{n_j} \frac{(C_j)^{n_j}}{n_j!} = \exp\left[\sum_j C_j\right]$$

**Helmholtz Free energy**

$$\mathcal{W}[J] \equiv \ln Z[J] = \sum_i C_i$$

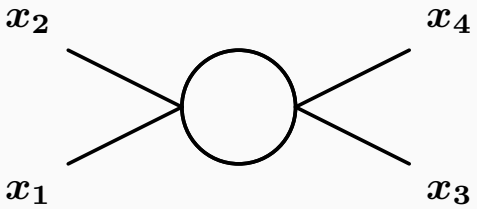
- $Z[J=0]$는 모든 vacuum bubble을 더한 것과 같다.
- $G_c$ ($G_{Jc}$)는 connected diagram의 합으로만 표시된다 (고려할 diagram의 개수 감소)

# Connected correaltion function 계산하기

- $\widetilde{G}_c^{(E)}$ 계산하기 (tilde 기호를 다시 붙임)

$$\widetilde{G}_c^{(E)}(1,\ldots,E) = \prod_{i=1}^{E} \widetilde{D}(x_i)\mathcal{W}[J]\Big|_{J=0}$$

- $\mathcal{W}[J]$에서 $E$개의 external point를 갖는 diagram을 얻음.
- $\widetilde{J}(\boldsymbol{x_i})$로 미분 ($x_i$들의 배열의 수가 곱해짐).
- blob을 지움 ($x_i$를 써서 명확히 하는 것은 좋음)
- 예




$+$ two permutations

- 위 예의 경우 각 적분식(3개가 있음)에 $\lambda^2/2$을 곱함.
- external point를 고정한 상태의 SF를 계산하면 됨.

# Feynman rules in momentum space

- Fourier transformation

$$\int_x \widetilde{\phi}(x)^4 = \int_k^{1\sim 4} \phi(\boldsymbol{k_1})\phi(\boldsymbol{k_2})\phi(\boldsymbol{k_3})\phi(\boldsymbol{k_4})\delta_k(1+2+3+4)$$

$$\int_x \widetilde{J}(x)\widetilde{\phi}(x) = \int_k J(-\boldsymbol{k})\phi(\boldsymbol{k})$$

- Connected correlation function

$$\begin{aligned} G_c^{(n)}(1,\ldots,n) &\equiv \langle \phi(\boldsymbol{k_1}) \cdots \phi(\boldsymbol{k_n}) \rangle_{\text{connected}} \\ &= (2\pi)^{dn} \frac{\delta}{\delta J(-\boldsymbol{k_1})} \cdots \frac{\delta}{\delta J(-\boldsymbol{k_n})} \mathcal{W}[J] \equiv \prod_{i=1}^{n} D(k_i) \mathcal{W}[J] \end{aligned}$$

# Feynman rules in momentum space (cont.)

- $G$와 $\widetilde{G}$의 관계

$$\widetilde{G}_c^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \int_k^{1\sim n} \left[ \prod_{j=1}^{n} e^{ik_j x_j} \right] G_c^{(n)}(1, \ldots, n)$$

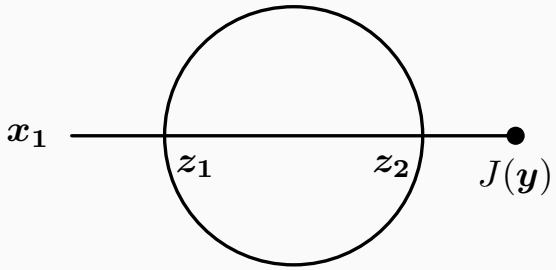
- perturbation

$$e^{-V_I} \doteq \exp\left[ -\frac{\lambda}{4!} \int_k^{1\sim 4} \left( \prod_{j=1}^{4} D(k_j) \right) \delta_k(1+2+3+4) \right].$$

  vertex당 momentum conservation이 성립.
- real space에서와 같은 방식으로 perturbation 전개
- momentum space에서 Feynman rule을 만드는 과정으로 진행할 수도 있지만, 결과는 같음

# Feynman rules in momentum space (cont.)

- real space diagram과 momentum space diagram : 예




$$\widetilde{C}(x_1) = \frac{\lambda^2}{6} \int_z^{1,2} \int_y \Delta(x_1, z_1) \times \Delta(z_1, z_2)^3 \Delta(z_2, y) \widetilde{J}(y)$$

Using $\Delta(x, y) = \int_k e^{ik(x-y)} \Delta(k)$, where $\Delta(k) = (\alpha^2 k^2 + \mu^2)^{-1}$, we get

$$\widetilde{C}(x_1) = \frac{\lambda^2}{6} \int_k^{1\sim5} \left[ \prod_{j=1}^{5} \Delta(k_j) \right] e^{ik_1 x_1} \int_y e^{-ik_5 y} \widetilde{J}(y) \times \times \int_z^{1,2} e^{i(k_2+k_3+k_4-k_1)z_1} e^{i(k_5-k_2-k_3-k_4)z_2}$$

# Feynman rules in momentum space (cont.)

Since $\int_z e^{ik_1 z} = \delta_k(1)$, we get

$$\widetilde{C}(x_1) = \frac{\lambda^2}{6} \int_k^{1\sim 5} \left[ \prod_{j=1}^{5} \Delta(k_j) \right] e^{ik_1 x_1} \delta_k(2+3+4-1)\delta_k(1-5) J(k_5)$$

$$= \frac{\lambda^2}{6} \int_k e^{ikx_1} \Delta(k) \int_k^{2,3} \Delta(k_2)\Delta(k_3)\Delta(k-k_2-k_3)\Delta(k) J(k).$$

Fourier 변환

$$C(k) = \int_x e^{-ikx} \widetilde{C}(x)$$

$$= \frac{\lambda^2}{6} \Delta(k) \int_k^{2,3} \Delta(k_2)\Delta(k_3)\Delta(k-k_2-k_3)\Delta(k) J(k)$$

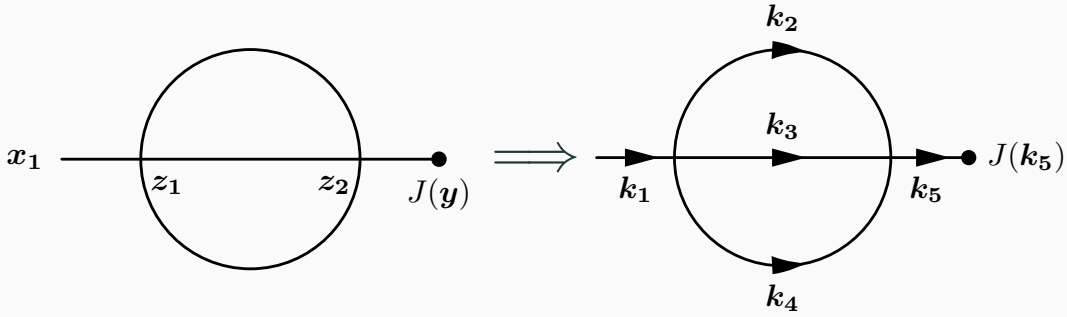
# Feynman rules in momentum space (cont.)

## Feynman rule in momentum space

1. $n$개의 external point에 $k_i$를 씀.
2. diagram을 그리고 momentum을 화살표와 함께 그려넣음.
3. external point에서 vertex로 연결되는 경우 화살표는 vertex 방향, momentum은 external point의 momentum.
4. $k$대신 $-k$를 쓰고 싶으면 $k$는 그대로 두고 화살표 방향을 반대로 바꾸면 된다.
5. 각 vertex에서 momentum 보존을 추가 [$\delta_k(1+2-3+\cdots)$].
6. $J(p)$가 있는 경우, $J$-blob에 들어가는 화살표 방향으로 $p$.
7. 각 link에 $\Delta(k)$를 곱하고, symmetry factor를 곱하여 vertex와 연결된 모든 $k$에 대하여 $\int_k$를 씀.

# Feynman rules in momentum space (cont.)

- Diagrams in momentum space




$$\frac{\lambda^2}{6}\delta_k(1-5)\Delta(k_1)\int_k^{2,3}\Delta(k_2)\Delta(k_3)\Delta(k_1-k_2-k_3)\Delta(k_5)J(k_5)$$

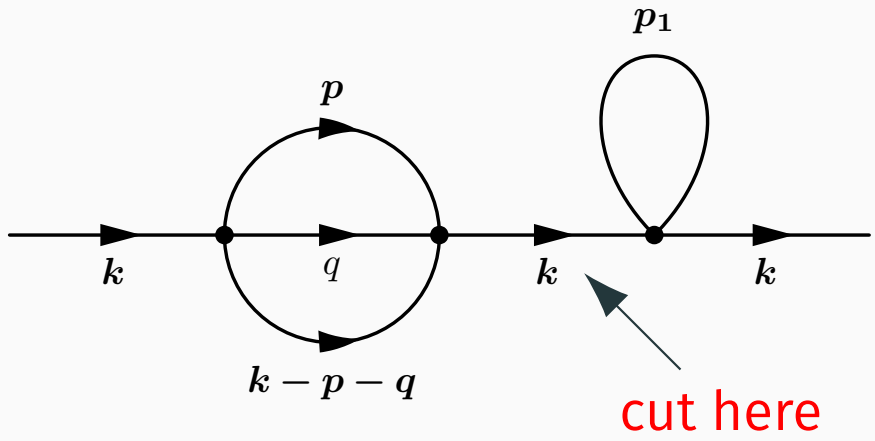
- reduced correlation function (translational invariance: $J=0$)

$$\widetilde{G}_c^{(n)}(1,\ldots,n)=\delta_k(1+\cdots+n)\widetilde{G}_c^{(n)}(\boldsymbol{k_1},\ldots,\boldsymbol{k_{n-1}})$$

- reduced와 full의 차이는 argument 개수의 차이로 구분할 것임.
- 고려해야 할 diagram의 수를 더 줄이는 방법이 있다: vertex function

# Vertex function and 1PI diagrams

- $G_c^{(2)}(k)$의 한 예 $D(k)$




$$D(k) = \Delta(k) \underbrace{\left[\frac{\lambda^2}{3!}\int_{pq} \Delta(p)\Delta(q)\Delta(k-p-q)\right]}_{\equiv I_0(k)} \times$$

$$\times \Delta(k) \underbrace{\left[\frac{-\lambda}{2}\int_{p} \Delta(p)\right]}_{\equiv I_1(k)} \Delta(k) = \Delta(k) I_0(k) \Delta(k) I_1(k) \Delta(k)$$

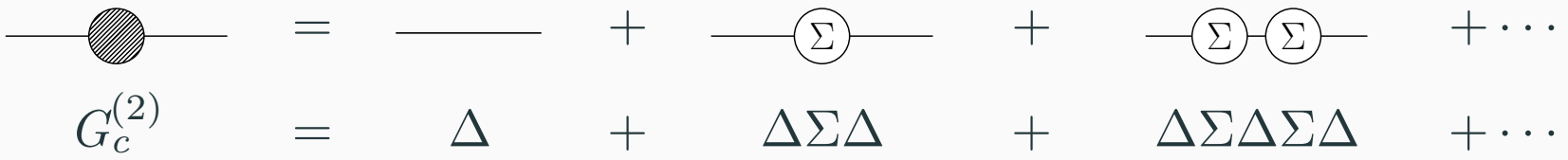
# Vertex function and 1PI diagrams (cont.)

- external point와 연결되지 않은 어떤 link를 잘랐더니 두 개의 disconnected diagram이 된다. $\Rightarrow$ one particle reducible (1PR)
- external point와 연결되지 않은 어떠한 link를 잘라도 여전히 하나의 connected diagram이다. $\Rightarrow$ one particle irreducible (1PI)
- an amputated (w.o. external legs) diagram : 1PI diagram에서 external point와 연결된 부분 제외. (예: $I_0, I_1$)
- define vertex functions $\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{k_1}, \ldots)$ as
  - $\Gamma^{(2)}$ = $\Delta(\boldsymbol{k})^{-1} + (-1)\times$ all amputated diagrams with two external momentums
  - $n \neq 2$ : $(-1)\times$ all amputated diagrams with $n$ external momentums.
- reduced vertex function (translation invariance)

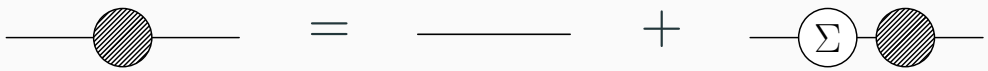
$$\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{k_1}, \ldots, \boldsymbol{k_n}) = \delta_k(1 + \cdots + n)\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{k_1}, \ldots, \boldsymbol{k_{n-1}})$$

# Vertex function and 1PI diagrams (cont.)

- $G_c^{(2)}$ 와 $\Gamma^{(2)}$ 의 관계 (geometric series)




$$G_c^{(2)} = \Delta + \Delta\Sigma\Delta + \Delta\Sigma\Delta\Sigma\Delta + \cdots$$




: $\Sigma$ amputated

$$G_c^{(2)} = \Delta + \Delta\Sigma G_c^{(2)}$$

$$G_c^{(2)} = \Delta + \Delta\Sigma G_c^{(2)} \Rightarrow G_c^{(2)} = \frac{1}{\Delta^{-1} - \Sigma} = \frac{1}{\Gamma^{(2)}}$$

# Vertex function and susceptibility

- susceptibility at zero field ($J = 0$, $V$: volume)

$$\chi \propto \frac{1}{V}\int_{xy}\left\langle\left(\widetilde{\phi}(x)-\left\langle\widetilde{\phi}\right\rangle\right)\left(\widetilde{\phi}(y)-\left\langle\widetilde{\phi}\right\rangle\right)\right\rangle$$

$$= \frac{1}{V}\int_{xy}\left.\frac{\delta^2\mathcal{W}[J]}{\delta\widetilde{J}(x)\delta\widetilde{J}(y)}\right|_{J=0} = \frac{1}{V}\int_{xy}\widetilde{G}_c(x,y) \propto G_c(k=0)$$

- susceptibility

$$\chi \propto G_c^{(2)}(k=0) \Rightarrow \chi^{-1} \propto \Gamma^{(2)}(k=0)$$

- critical point는 $\Gamma^{(2)}(k=0)$이 0이 되는 온도.
- $G_c^{(2)}$보다 $\Gamma^{(2)}$를 공부하는 것이 편리할 수 있다.

# Gibbs free energy

- average

$$\widetilde{\varphi}(x) = \langle \widetilde{\phi}(x) \rangle = \widetilde{D}(x)\mathcal{W}[J],$$
$$\varphi(k) = \int_x e^{-ikx}\widetilde{\varphi}(x) = D(k)\mathcal{W}[J].$$

- Legendre transformation

$$\Gamma[\varphi] + \mathcal{W}[J] = \int_k J(-k)\varphi(k) = \int_x \widetilde{J}(x)\widetilde{\varphi}(x).$$

- similar to the Hamiltonian formalism in mechanics
- $J$를 $\varphi$의 functional로 변경하면, $\Gamma$는 $\varphi$만의 functional이 된다.
- $\Gamma$는 Gibbs free energy이다 (a.k.a. effective action).
- 편의상 real space에서 논의할 것임 (tilde 기호 제거)

# Gibbs free energy와 vertex function

- $\Gamma^{(n)}$을 다음과 같이 정의한다.

$$\Gamma^{(n)}(1,\ldots,n;\varphi) \equiv \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_n)}.$$

- $J$와 $\varphi$의 관계 (note 참고).

$$\Gamma^{(1)} = \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)} = J(x)$$

  $\varphi$는 위 방정식의 해로부터 얻을 수 있다.

- $J=0$이면,
  - disordered phase에서 $\varphi(x)=\varphi_0=0$
  - ordered phase에서 $\varphi(x)=\varphi_0\neq 0$
- $\Gamma$는 spontaneous magnetization을 공부하기에 적절하다.

# Gibbs free energy와 vertex function (cont.)

- $\Gamma^{(2)}$와 $G_c^{(2)}$는 서로 역행렬 관계이다. (note 참고)
- $\Gamma^{(2)}$는 양의 정부호 행렬이므로 $J=0$인 경우에, $\Gamma[\varphi=\varphi_0]$는 최솟값이 된다. (action과 유사하여 effective action이라고 부름)
- $\Gamma$를 $\varphi=\varphi_0$에 대하여 전개.

$$\Gamma[\varphi]=\Gamma^{(0)}(\varphi_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_x^{1\sim n}\left[\prod_{j=1}^{n}(\varphi(x)-\varphi_0)\right]\Gamma^{(n)}(\ldots;\varphi_0),$$

$$\Gamma^{(n)}(\ldots;\varphi_0)=\prod_{j=1}^{n}D_\varphi(x_j)\Gamma[\varphi]\Big|_{\varphi=\varphi_0}.$$

- $\varphi=\varphi_0$이면 $J=0$이므로, $\Gamma^{(0)}(\varphi_0)=-\mathcal{W}[J=0]$.
- $\mathcal{W}[0]$는 모든 1PI vacuum bubble들의 합이다.

# Gibbs free energy와 vertex function (cont.)

- disordered phase에서는 $\varphi_0 = 0$이므로, 이 경우는 $\varphi = 0$에 대한 전개로 생각할 수 있다.
- $\Gamma$를 $\varphi$에 대한 analytic function이라고 가정하면, $\varphi = 0$에 대한 전개식으로부터도 ordered phase의 성질을 공부할 수 있다.

$$f(x) = \sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

- 향후 논의에서는 $\varphi = 0$(disordered phase)으로부터의 전개만 다룰 것이다.
- $\Gamma^{(n)}$의 argument에서 $\varphi_0$를 제외하고 쓸 것이다.
- Ginzburg-Landau ($\phi^4$) theory에서는 $\Gamma^{(1)} = J|_{\varphi=0} = 0$이다.
- note에서와 유사한 계산을 반복하면 $\Gamma^{(n)}$은 vertex function이 됨을 알 수 있다.

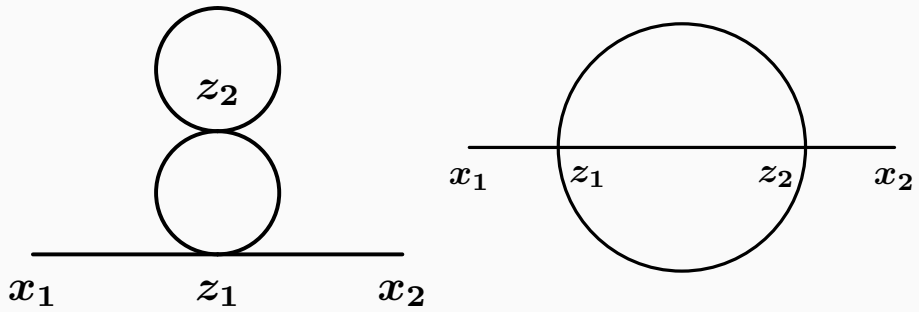
# Feynman rule for the vertex functions

## vertex function $\Gamma^n$의 $\lambda^V$차수까지 계산하기

1. vertex $V$개와 외부 점 $n$개를 연결하는 amputated diagram을 모두 구한다.
2. $i$번째 diagram에 적절한 symmetry factor $S_i$를 구한다.
3. internal link에 $\Delta$를 곱하고 내부 운동량으로 모두 적분한다. 적분 결과를 $I_i$라고 하자.
4. $V$차 항까지 $\Xi_V = \sum_V (-\lambda)^V \sum_i \frac{1}{S_i} I_i$를 계산한다.
5. $n \neq 2$이면 $\Gamma^{(n)} = -\Xi_V$이다.
6. $n = 2$이면 $\Gamma^{(2)} = \alpha^2 k^2 + \mu^2 - \Xi_V$이다.

# Loop expansion

- loop : diagram에서 link들의 닫힌 경로. 이 경로 안쪽 면에는 선분이 없어야 함.
- two-loop diagram의 예




- loop expansion은 $\hbar$ expansion (semi-classical approximation) 과 같다. (volume이 $\hbar^{-1}$의 역할을 한다.)
- Hamiltonian에 $\hbar^{-1}$을 곱한 경우를 고려하자.

$$\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\left(\mathcal{H}_G + V_I\right)\right] \quad \Rightarrow \Delta \mapsto \Delta\hbar, \quad V_I \mapsto V_I/\hbar$$

# Loop expansion (cont.)

- 어떤 amputated diagram에 등장하는 vertex의 개수가 $V$, internal link의 개수가 $I$라면, 이 diagram은 $O(\hbar^{I-V})$가 된다.
- $V$개의 delta 함수 중, 하나는 external momentum 보존으로 나가고, 나머지 $V-1$개의 delta함수 개수만큼 적분 수가 줄어든다.
- 전체 $I$개의 적분 중에서 $V-1$개의 적분이 없어지므로 총 $L \equiv I - V + 1$개의 적분이 남는다. 즉, 이 diagram은 $O(\hbar^{L-1})$이다.
- 2차원 diagram의 전체를 덮는 하나의 면을 추가하여 3차원 다면체를 만들자. 이제 다면체에 대한 Euler 공식 (변의 수 $-$ 꼭짓점의 수 = 면의수 $-2$)과 $I - V = (L+1) - 2$을 고려하면 $L$은 loop의 개수임을 알 수 있다.
- $L = 0$인 경우를 tree-approximation이라고 하고, mean field theory가 된다. 이는 $\hbar \to 0$일 때 논의되는 Bohr의 대응원리와 같다 (minimum action).

# Loop expansion (cont.)

- $\phi^4$ theory의 경우 $\hbar = \lambda$라고 두면, loop expansion이 $\lambda$ expansion과 비슷해진다. (일반적으로 이렇게 변경할 수는 없다.)
- 예 : $V_I = \lambda_3\phi^3 + \lambda_4\phi^4$인 경우 $\Gamma^{(3)}$의 $L$-loop 계산

1. $\phi^k$가 $v_k$개 등장한다고 하자. ($\phi$의 갯수는 $N = 3v_3 + 4v_4$)
2. $N$개 중 $3$개는 ($\Gamma^{(3)}$이므로) external point와 연결되어야 하므로, amputated diagram에 역할을 하지 않는다.
3. $N-3$개에서 두 개씩 쌍을 이뤄 하나의 link를 만들므로 $I = \dfrac{N-3}{2} = \dfrac{3v_3 + 4v_4 - 3}{2}$이다.
4. $V = v_3 + v_4$이므로, $v_3$, $v_4$는 $L - 1 = I - V = \dfrac{v_3 + 2v_4 - 3}{2}$를 만족해야 한다.
5. $L = 1$이라면 $(v_3, v_4) = (1, 1), (3, 0)$의 두 해가 존재한다.
6. 가능한 1PI diagram들을 모두 그린다.

# Tree approximation for $\Gamma$

- $\Gamma^{(n)}$ with $V$ vertices ($L = 0$)

$$I = \frac{4V - n}{2} = 2V - \frac{n}{2}, I - V = V - \frac{n}{2} = L - 1 = -1$$

$$V = \frac{n}{2} + L - 1 \to \frac{n}{2} - 1$$

- $n = 2 \to V = 0 : \Gamma^{(2)} = \alpha^2 k^2 + \mu^2$
- $n = 4 \to V = 1 : \Gamma^{(4)} = \lambda\delta(1 + 2 + 3 + 4)$
- $n \geq 6 \to$ no 1PI diagrams. (note 참고)
- NB: tree approximation에서 $\Gamma$는 $\mathcal{H}$와 같아진다.

# Tree approximation for $\Gamma$ (cont.)

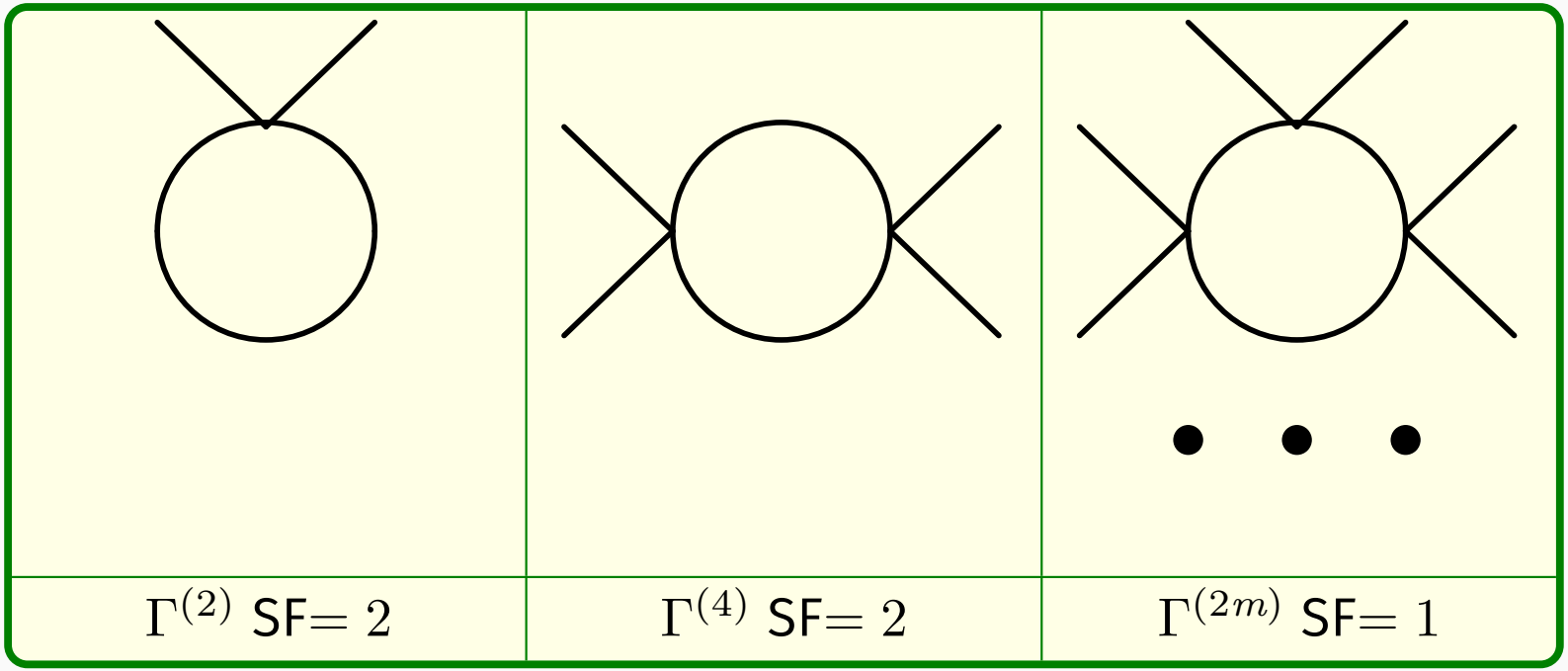
- $\Gamma = \Gamma_0 + O(\hbar)$ with

$$\begin{aligned}
\therefore \Gamma_0[\varphi] =& \frac{1}{2}\int_k (\alpha^2 k^2 + \mu^2)\varphi(-k)\varphi(k) \\
&+ \frac{\lambda}{4!}\int_k^{1\sim 4} \varphi(-k_1)\varphi(-k_2)\varphi(-k_3)\varphi(-k_4)\delta(1+2+3+4) \\
&= \int_x \left[\alpha^2(\nabla\widetilde{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\mu^2\widetilde{\varphi}^2 + \frac{\lambda}{4!}\widetilde{\varphi}^4\right] = \mathcal{H}[\varphi] \\
\widetilde{J}(x) =& \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi} = \left(-\nabla^2 + \mu^2\right)\widetilde{\varphi} + \frac{\lambda}{3!}\widetilde{\varphi}^3
\end{aligned}$$

- loop expansion은 $\lambda$ expansion과 다른 의미이다.
- 만약 $\widetilde{J}(x) = J_0$ (상수)이면, $\widetilde{\varphi} = \varphi_0$ 이고 다음을 만족한다.
  $J_0 = \mu^2\varphi_0 + \frac{\lambda}{3!}\varphi_0^3$ : Landau theory
- Using $\Gamma$ we can study the spontaneous magnetization.

# One loop correction to $\Gamma$

- one loop diagrams for $\Gamma^{(n)}$
- $L = 1$이므로, $V = n/2$를 만족하여 $n$이 짝수인 경우만 나온다.
- diagrams



# One loop correction to $\Gamma$ (cont.)

- $\widetilde{J} = J_0$ 인 경우만 고려하면 $\widetilde{\varphi} = \varphi_0$(상수)가 되므로,

$$\varphi(-k) = \int_x e^{ikx}\varphi_0 = \varphi_0\delta_k(k)$$

따라서,

$$\begin{aligned}\Gamma &= \Gamma^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_k^{1\sim n}\prod_{i=1}^{n}\varphi(-k_i)\Gamma^{(n)}(\dots,n-1)\delta_k(\cdots+n)\\ &= \Gamma^{(0)} + \delta_k(0)\sum_n\frac{1}{n!}\varphi_0^n\Gamma^{(n)}(0,\dots,0),\end{aligned}$$

$$\delta_k(0) = \int_x e^{i0x} = V.$$

- 위에서 $\Gamma^{(n)}$ 은 reduced vertex function 이다.

# One loop correction to $\Gamma$ (cont.)

- $\Gamma^{(n)}$ 에서 모든 운동량이 0인 경우만 계산하면 된다.
- $\Gamma^{(2)}$ : 운동량을 배열하는 경우는 한 가지.

$$\Gamma^{(2)}(0) = (-1)^{1+1} \frac{2!}{2 \times 1} \int_p \frac{\lambda}{2} \Delta(p)$$

- $\Gamma^{(4)}(0)$ : 운동량을 배열하는 경우는 세 가지.

$$\Gamma^{(4)}(0) = (-1)^{2+1} \frac{4!}{2 \times 2} \int_p \left[ \frac{\lambda}{2} \Delta(p) \right]^2$$

- $\Gamma^{(2m)}(0)$ : 운동량을 배열하는 방법 $\frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{(m-1)!}{2}$

$$\Gamma^{(2m)}(0) = (-1)^{m+1} \frac{(2m)!}{2m} \int_p \left[ \frac{\lambda}{2} \Delta(p) \right]^m$$

# One loop correction to $\Gamma$ (cont.)

- one loop correction $U_1$ ($V$는 volume)

$$U_1(\varphi_0) = V\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}\Gamma^{(2m)}(0)\varphi_0^{2m}$$

$$= \frac{V}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\int_p\left(\frac{-\lambda\varphi_0^2}{2}\Delta(p)\right)^m = \frac{V}{2}\int_p \ln\left(1+\frac{\lambda\varphi_0^2}{2}\Delta(p)\right)$$

- One loop order에서 $\Gamma^{(0)} = -\ln Z_G[J=0]$ 이므로,

$$\frac{\Gamma}{V} = \frac{1}{2}\mu^2\varphi_0^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi_0^4 + \frac{1}{2}\int_p \ln\left(\alpha^2 p^2 + \mu^2 + \frac{\lambda\varphi_0^2}{2}\right)$$

- spontaneous magnetization

$$0 = \frac{1}{V}\frac{d\Gamma}{d\varphi_0} = \mu^2\varphi_0 + \frac{\lambda}{3!}\varphi_0^3 + \frac{\lambda}{2}\varphi_0\int_p \frac{1}{\alpha^2 p^2 + \mu^2 + \lambda\varphi_0^2/2}$$

# One loop correction to $\Gamma$ (cont.)

- $\varphi_0 = 0$ or

$$0 = \mu^2 + \frac{\lambda}{3!}\varphi_0^2 + \frac{\lambda}{2}\int_p \frac{1}{\alpha^2 p^2 + \mu^2 + \lambda\varphi_0^2/2}$$

- $\mu_c^2 = 0$이라고 하면 $\int_p p^{-2}$이 0이 되어야 한다.
- 따라서 $\mu_c^2 < 0$이다.
- mean field 이상의 결과를 처음으로 얻었다.
- 위 적분은 $\Lambda^{d-2}$의 행동을 한다. $\Lambda \to \infty$이면 발산!
- $\infty$를 어떻게 처리해야 할까?

# Renormalization

# $\Lambda$-sensitivity of diagrams: general discussion

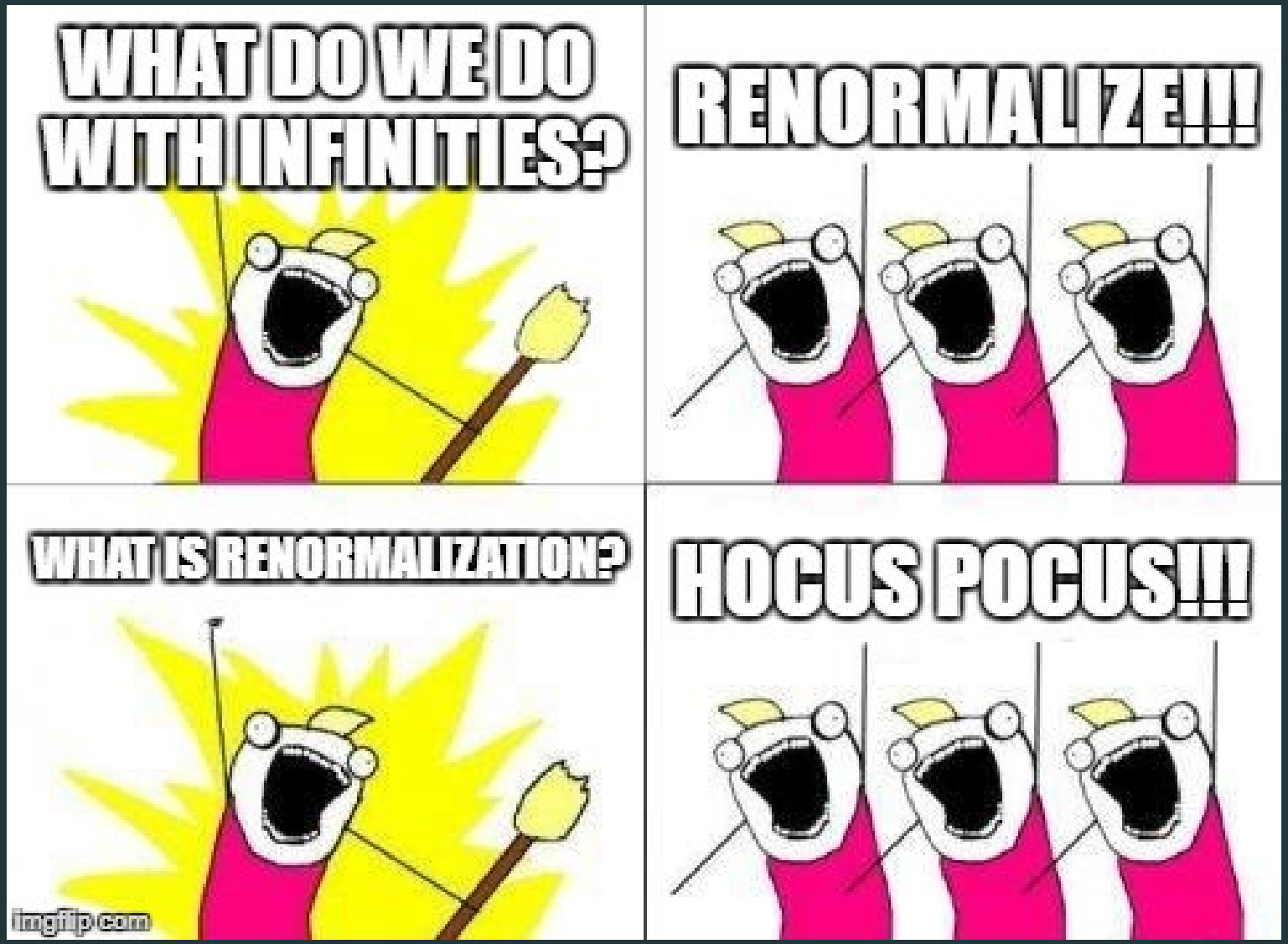
- each loop corresponds to an integral $\int_q \sim \Lambda^d$.
- each internal link corresponds to $\Delta \sim \Lambda^{-2}$.
- $L$-loop corrections to $\Gamma^{(n)}$

$$2I = 4V - n, \quad I - V = V - \frac{n}{2} = L - 1$$
$$\Rightarrow \text{diagram} \sim \Lambda^{Ld-2I} = \Lambda^{4-n+(d-4)L}$$

- for $n = 4$ and $d = 4$, correction $\sim \Lambda^0 = \ln \Lambda \to \infty$?

$$\text{참고 : } \int_0^\Lambda \frac{1}{x+1} dx = \ln(\Lambda + 1)$$

- Since bare parameters are not known a priori, we expect physics should be $\Lambda$-insensitive. But how? RENORMALIZATION



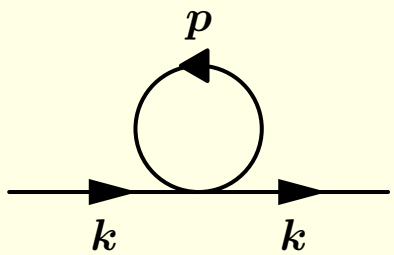
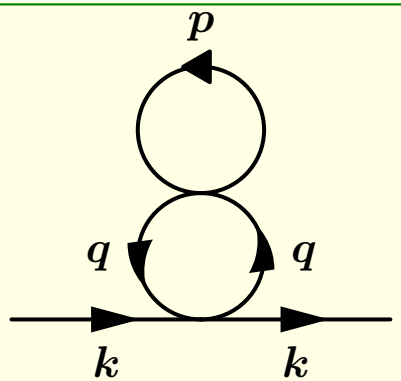
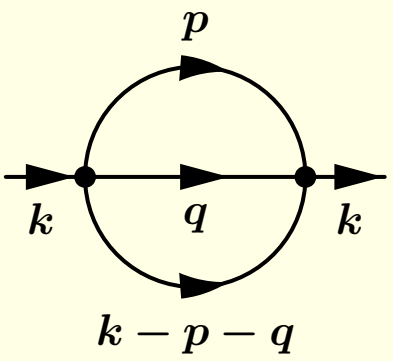

hocus-pocus : 간교한 말장난

# diagrams for $\Gamma^{(2)}$

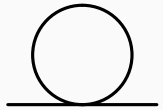
- $L$-loop corrections to $\Gamma^{(n)}$

$$I = \frac{4V - n}{2} \to I - V = V - \frac{n}{2} = L - 1 \Rightarrow V = L - 1 + \frac{n}{2}.$$

**diagrams for $\Gamma^{(2)}$ up to two loops**

| one-loop | two-loop | two-loop |
|---|---|---|
|   |   |   |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3!}$ |

# One-loop correction

- one-loop amputated diagram  and $\Gamma^{(2)}(k)$

$$-\frac{-\lambda}{2}\int_p \Delta(p) \equiv \frac{\lambda}{2} I_0(\alpha, \mu, \Lambda),$$

$$\Gamma^{(2)}(k) = \alpha^2 k^2 + \mu^2 + \frac{\lambda}{2} I_0 + O(\lambda^2)$$

- $I_0 = \dfrac{S_{d-1}}{(2\pi)^d} \displaystyle\int_0^\Lambda \frac{q^{d-1}\, dq}{\alpha^2 q^2 + \mu^2} \sim \Lambda^{d-2} \to \infty$ for $d \geq 2$.
- we do not know the exact value of microscopic parameters.
- we will reformulate the theory using “macroscopic” (or observable) parameters.

JOAN CARTIER

ALRIGHT RUTH, I ABOUT GOT THIS ONE RENORMALIZED.

# Mass renormalization

- sweep infinity under the carpet

$$m^2 \equiv \Gamma^{(2)}(k=0) = \mu^2 + \frac{\lambda}{2} I_0 + O(\hbar^2),$$
$$\Gamma^{(2)}(k) = \alpha^2 k^2 + m^2 + O(\hbar^2)$$

- $O(\hbar^2)$은 two-loop order임을 표기하기 위한 기호이다.
- $\Gamma^{(2)}$ is finite!
- physical motivation

$$G_c^{(2)}(k=0) = \left\langle \left(\delta\bar{\phi}\right)^2 \right\rangle \propto \chi \text{ (susceptibility)}$$
$$\Gamma^{(2)}(k=0) \propto \chi^{-1} \sim |T - T_c|^{\gamma} \text{ .( } \gamma \text{ is the critical exponent)}$$

- $\mu$를 bare mass, $m$을 renormalized (dressed) mass라고 부른다.

# Mass renormalization (cont.)

- two-loop amputated diagrams and $\Gamma^{(2)}(k)$

$$-\frac{\lambda^2}{4}\underbrace{\int_p \Delta(p)}_{I_0}\underbrace{\int_q \Delta(q)^2}_{\equiv I_1(\alpha,\mu,\Lambda)} - \frac{\lambda^2}{6}\underbrace{\int_{pq} \Delta(p)\Delta(q)\Delta(k-p-q)}_{\equiv A(k;\alpha,\mu,\Lambda)}$$

$$\Gamma^{(2)}(k) = \alpha^2 k^2 + \mu^2 + \frac{\lambda}{2} I_0 - \frac{\lambda^2}{4} I_0 I_1 - \frac{\lambda^2}{6} A(k) + O(\hbar^3)$$

- renormalization

$$m^2 = \Gamma^{(2)}(k=0) = \mu^2 + \frac{\lambda}{2} I_0 - \frac{\lambda^2}{4} I_0 I_1 - \frac{\lambda^2}{6} A(0) + O(\hbar^3),$$

$$\Gamma^{(2)}(k) = \alpha^2 k^2 + m^2 - \frac{\lambda^2}{6}\Delta A(k) + O(\hbar^3),\ [\Delta A(k) \equiv A(k) - A(0)]\,.$$

- Now $\Gamma^{(2)}(k)$ has a nontrivial $k$ dependence.

# Mass renormalization (cont.)

- cutoff dependence of $A(0)$ and $\Delta A(k)$ for small $k$ (note 참고)

$$A(0) = \int_{pq} \Delta(p)\Delta(q)\Delta(Q) \sim \Lambda^{2d-6}, \quad (\text{note } Q \equiv p+q)$$

$$\Delta A(k) = \int_{pq} \Delta(p)\Delta(q)\left[\Delta(k-Q) - \Delta(Q)\right] \sim \Lambda^{2d-8}$$

- $d < 4$이면 $\Delta A(k)$는 $\Lambda \to \infty$일 때 수렴.
- Finally, we have a finite theory for $d < 4$ as

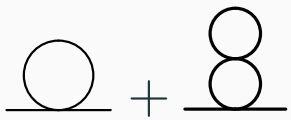
$$\Gamma^{(2)}(k) = \alpha^2 k^2 + m^2 - \frac{\lambda^2}{6}\Delta A(k).$$

- Still, we have $\ln \Lambda$ behavior at $d = 4$
- mass renormalization으로 얻게되는 이점은?

# $\Gamma^{(n)}$ 계산에서 $\Delta$를 $G_c^{(2)}$로 변경하는 효과

- motivation : one-loop diagram

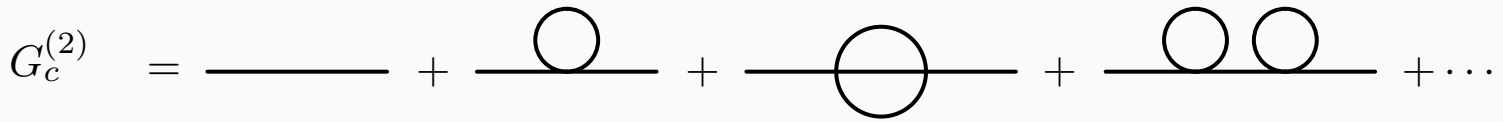
$$\frac{\lambda}{2}\int_p \frac{1}{\alpha^2 p^2 + m^2} = \frac{\lambda}{2}\int_p \left[\alpha^2 p^2 + \mu^2 + \frac{\lambda}{2} I_0 + O(\hbar^2)\right]^{-1}$$

$$= \frac{\lambda}{2}\int_p \Delta(p) - \frac{\lambda^2}{4} I_0 \int_q \Delta(q)^2 + O(\hbar^3) =$$ 

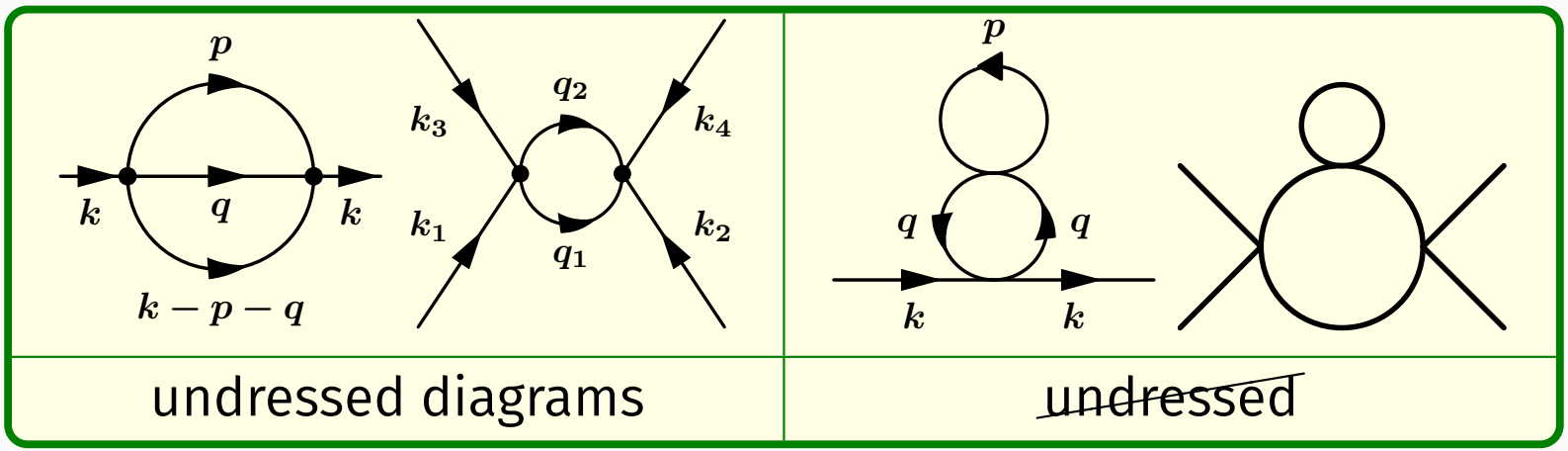
- one-loop correction 계산에서 $\mu^2$을 $m^2$으로 변경하였더니, two-loop bubble diagram이 자연스럽게 등장하였다.
- 일반적인 loop 계산에서 bare propagtor $\Delta$를 $G_c^{(2)}$로 변경한다면?

# $\Gamma^{(n)}$ 계산에서 $\Delta$를 $G_c^{(2)}$로 변경하는 효과 (cont.)

- $G_c^{(2)}$에 해당되는 모든 diagram을 고려하자.




- $\Gamma^{(n)}$의 diagram중에서 $G_c^{(2)}$를 구성하는 one-loop 이상의 diagram이 subdiagram으로 나타나지 않는 diagram (undressed) 고려



# $\Gamma^{(n)}$ 계산에서 $\Delta$를 $G_c^{(2)}$로 변경하는 효과 (cont.)

- 모든 undressed diagram의 각 link에 $G_c^{(2)}$를 구성하는 모든 diagram을 하나씩 추가하면, 모든 1PI diagram 구성
- 이는 undressed diagram에서 각 link를 $G_c^{(2)}$로 바꾼 효과와 같아진다.
- 주의 : undressed는 내가 만든 용어임.
- cf : skeleton diagram

# $\mu^2$과 $m^2$의 관계

- $m^2$의 two-loop order까지의 correction

$$m^2 = \mu^2 + \frac{\lambda}{2} I_0(\mu) - \frac{\lambda^2}{4} I_0(\mu) I_1(\mu) + \frac{\lambda^2}{6} A(k=0,\mu) + O(\hbar^3)$$

- $\mu^2$을 $m^2$과 $\Lambda$의 함수로 표현하기

$$\mu^2 = m^2 - \frac{\lambda}{2} I_0(m) + \frac{\lambda^2}{6} A(k=0,m) + O(\hbar^3)$$

- $m^2$은 유한한 값이므로 $\mu^2$이 발산하는 값이 된다.
- Note) Route to a Continuous Field

$$\mu^2 \propto a_0^{-2} = O(\Lambda^2)$$

# Field renormalization

- $\Delta A(k) \sim \ln \Lambda$ if $d = 4$
- mass renormalization처럼 발산항을 흡수하는 새로운 변수를 도입하자.
- 임의의 $\kappa$에 대하여 $a^2$을 다음과 같이 정의하자.

$$a^2 \equiv \left.\frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial k^2}\right|_{k=\kappa} = \alpha^2 + \frac{\lambda^2}{6} \underbrace{\int_{pq} \Delta(p)\Delta(q) \frac{\alpha^2\kappa^2 - \alpha^2 \kappa \cdot Q}{\left[\alpha^2(\kappa - Q)^2 + m^2\right]^2}}_{\equiv B(\kappa) \sim \Lambda^{2d-8}}$$

- NB $A(k) = a_0 \Lambda^{2d-6} + a_2 k^2 \Lambda^{2d-8} + a_4 k^4 \Lambda^{2d-10} + \cdots$

# Field renormalization (cont.)

- renormalization

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(k) &= a^2k^2 + \Gamma^{(2)}(k) - k^2 \left.\frac{\partial\Gamma^{(2)}}{\partial k^2}\right|_{k=\kappa} \\ &= m^2 + \alpha^2k^2 - \frac{\lambda^2}{6}\Delta A(k) - k^2 \left.\frac{\partial\Gamma^{(2)}}{\partial k^2}\right|_{k=\kappa} + a^2k^2 + O(\hbar^3) \\ &= m^2 + k^2\left[a^2 - \frac{\lambda^2}{6}B(k,\kappa)\right] + O(\hbar^3),\end{aligned}$$

where

$$B(k,\kappa) = \frac{1}{k^2}\Delta A(k) + \frac{6}{\lambda^2}\left(\left.\frac{\partial\Gamma^{(2)}}{\partial k^2}\right|_{k=\kappa} - \alpha^2\right) \sim \Lambda^{2d-10}$$

# discussion

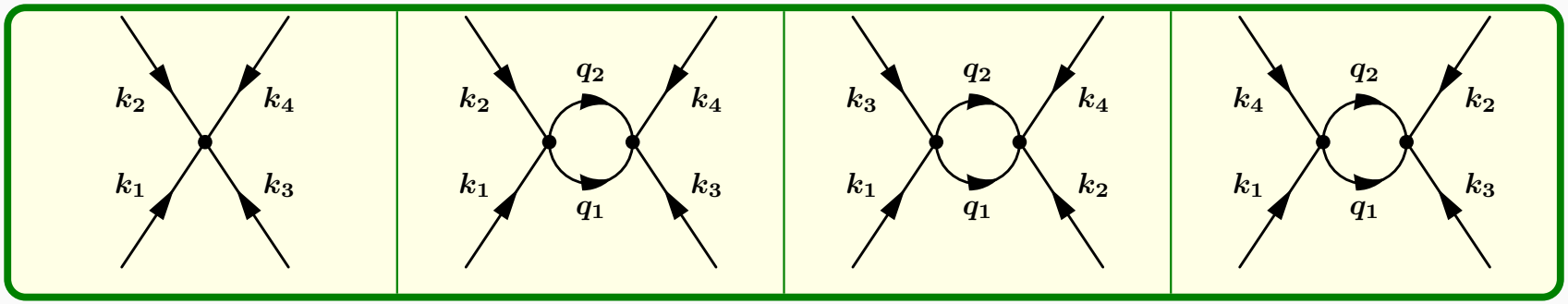
- $T = T_c$일 때, $\kappa = 0$이면, $a$는 diverge하므로 ($\Gamma^{(2)} \sim k^{2-\eta}$), $\kappa$를 0 아닌 값으로 설정한다.
- 유한한 이론을 만드는 것이 목표라면 $\kappa$를 어떤 것으로 선택해도 무방하다.
- $\kappa$가 변하면, 하나의 bare parameter set으로부터 여러 renormalized parameter set이 만들어진다: renormalization group (RG)의 시작점.
- 모든 diagram의 propagator에 $\alpha^2$을 $a^2$으로 변경하면 higher order loop correction이 추가된 효과를 얻는다.
- 앞으로는 propator에

$$G_0 \equiv \frac{1}{a^2 k^2 + m^2}$$

를 사용하고, undressed diagram들만 고려한다.

# Coupling constant renormalization: one loop

- up to one-loop diagrams for $\Gamma^{(4)}$ [recall $\delta_k(1+2+3+4)$]




$$\Gamma^{(4)}(1,2,3) = \lambda$$
$$- \frac{\lambda^2}{2}\left[\int_q G_0(q)\,G_0(1+2-q) + \text{ 2 permutations}\right] + O(\hbar^2)$$

- 적분은 $\Lambda^{d-4}$ 행동을 한다. $\Gamma^{(4)}$ 에서 $\hbar^2$ 은 $\lambda^3$ 으로 이해해야 한다.

# Coupling constant renormalization: one loop (cont.)

- removing $\ln \Lambda$ by coupling constant renormalization: $g$

$$g \equiv \Gamma^{(4)}(0,0,0) = \lambda - \frac{3\lambda^2}{2} \int_q G_0(q)^2 + O(\hbar^2)$$

$$\lambda = g + \frac{3g^2}{2} \underbrace{\int_q G_0(q)^2}_{I_1(m,\Lambda)} + O(\hbar^2)$$

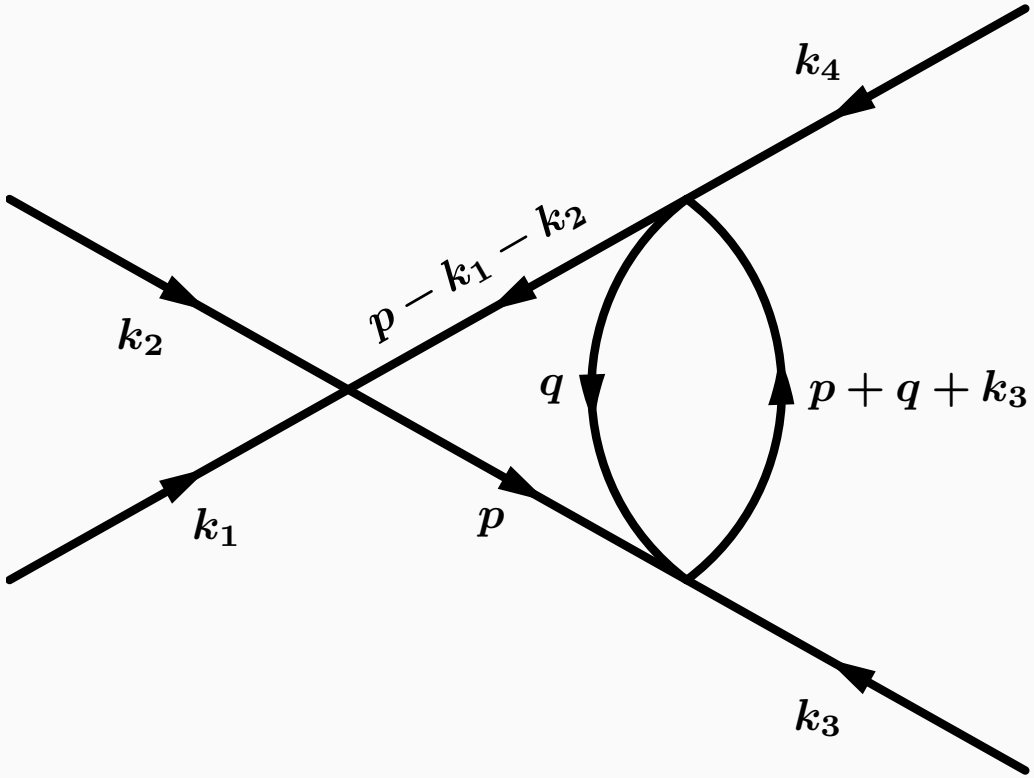
$$\Gamma^{(4)}(1,2,3) = g - \frac{g^2}{2} \int_q G_0(q)^2 \times \\ \times \left( \frac{2a^2 \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{K} - a^2 K^2}{a^2 (q-K)^2 + m^2} + \text{ 2 permutations } \right),$$

  where $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_2}$ (and two other permutations).

- 위의 적분은 $\Lambda^{d-6}$ 행동을 하므로 $d < 6$이면 유한하다.

# Coupling constant renormalization : two loops

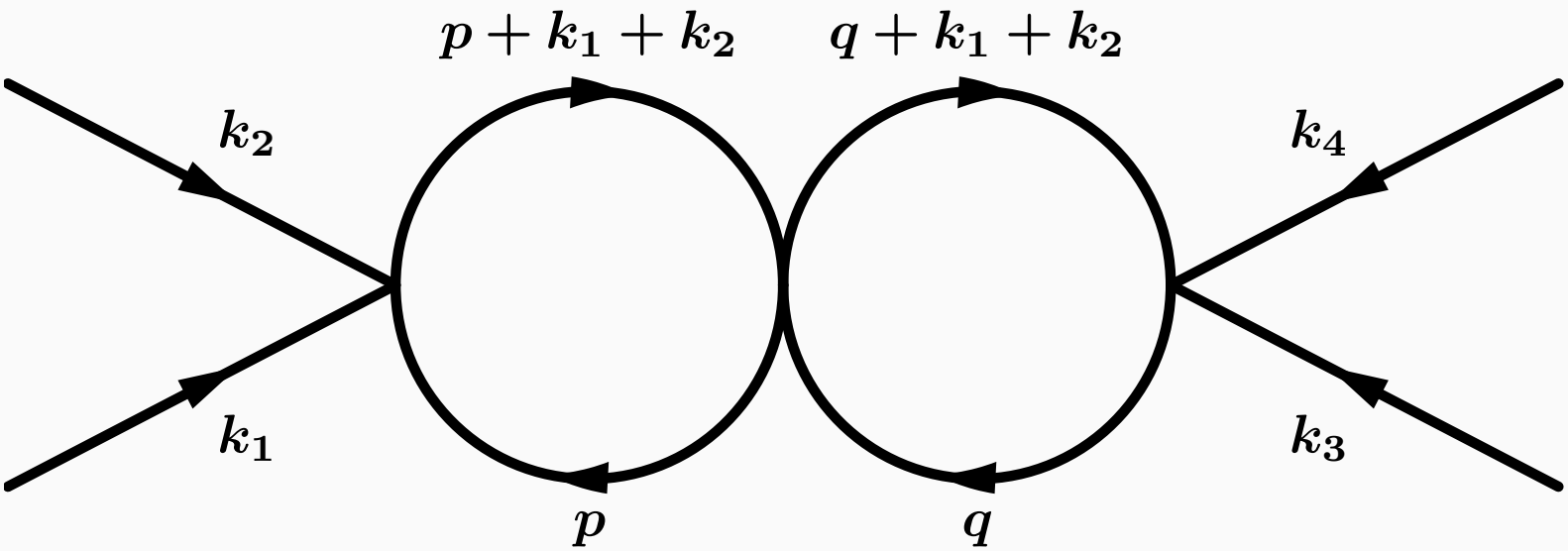
- two-loop diagram 첫번째




$$\frac{\lambda^3}{2}\int_{pq} G_0(p)\,G_0(p-k_1-k_2)\,G_0(q)\,G_0(p+q+k_3) + \text{ 5 perm.}$$

# Coupling constant renormalization : two loops (cont.)

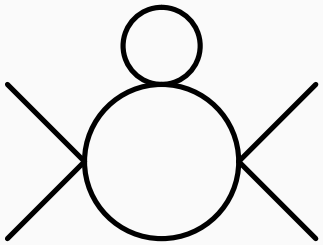
- two-loop diagram 두번째




$$\frac{\lambda^3}{4}\left[\int_p G_0(p)\,G_0(p+k_1+k_2)\right]^2 + \text{ 2 perm.}$$

# Coupling constant renormalization : two loops (cont.)

- two-loop diagram 세번째



already treated by the mass renormalization

- renormalized $g$ and bare $\lambda$ (note 참고)

$$g = \lambda - \frac{3}{2}\lambda^2 I_1 + \frac{3}{4}\lambda^3 I_1^2 + 3\lambda^2 I_2(m,\Lambda),$$

$$I_2(m,\Lambda) \equiv \int_{pq} G_0(p)^2 G_0(q) G_0(p+q),$$

$$\lambda = g + \frac{3}{2}g^2 I_1 + \frac{15}{4}g^3 I_1^2 - 3g_1^3 I_2.$$

# Coupling constant renormalization : two loops (cont.)

- bare mass

$$\begin{aligned}\mu^2 &= m^2 + \frac{\lambda}{2} I_0 + \frac{\lambda^2}{6} A(k=0,m) + O(\hbar^3) \\ &= m^2 + \frac{g}{2} I_0 - \frac{3}{4} g^2 I_0 I_1 + \frac{g^2}{6} A(k=0,m) + O(\hbar^3)\end{aligned}$$

- $\lambda$를 $g$로 바꾸면 $d < 6$에서 $\Gamma^{(4)}$는 $\Lambda$-insensitive
- 두 가지 관점
  1. $a, m, g$는 $\alpha, \mu, \lambda$와 $\Lambda$의 함수.
  2. $\alpha, \mu, \lambda$는 $a, m, g$와 $\Lambda$의 함수.

# Coupling constant renormalization : discussion

- 발산항을 없애는 한에서는 $k_i = 0$을 꼭 지정할 필요는 없다.
  일반적으로 임의의 $\kappa$에 대하여

$$g \equiv \Gamma^{(4)}(\boldsymbol{\kappa_1}, \boldsymbol{\kappa_2}, \boldsymbol{\kappa_3})$$

  라고 정의하여도 renormalization에는 문제가 없다.
- 이 $\boldsymbol{\kappa}$들을 renormalization point라고 부른다.
- 보통 $\boldsymbol{\kappa_i} \cdot \boldsymbol{\kappa_j} = \frac{3}{4}\kappa^2\delta_{ij} - \frac{1}{4}\kappa^2(1-\delta_{ij})$가 되도록 정한다.
- $(\boldsymbol{\kappa_1} + \boldsymbol{\kappa_2})^2 = (\boldsymbol{\kappa_2} + \boldsymbol{\kappa_3})^2 = (\boldsymbol{\kappa_3} + \boldsymbol{\kappa_1})^2 = \kappa^2$
- 위처럼 선택된 momentum을 symmetry point (SP)라고 부른다.
- $\kappa$는 field renormalization에서 사용한 같은 $\kappa$를 보통 사용한다.

# 질문 하나

- $a$, $m$, $g$를 통해서 $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(4)}$를 $d \leq 4$에서 유한하도록 만들었다.
- $\Gamma^{(2p)}$ $(p \geq 3)$을 유한하게 만들려면 새로운 parameter들이 필요할까?
- Loop의 개수가 늘어나면 $\Gamma^{(4)}$에서 새로운 $\Lambda$ divergence가 등장하여 field renormalization같은 새로운 parameter가 필요해 지는 것은 아닐까?
- How many parameters are necessary to have finite $\Gamma^{(n)}$ for any $n$ in all orders?

# Engineering dimension revisited

- remind
  - $[\widetilde{\phi}(x)] = \frac{d}{2} - 1, \quad [\phi(k)] = -\frac{d}{2} - 1.$
  - $\lambda_r \int_x \phi^r$ interaction $\Rightarrow [\lambda_r] = d + r - \frac{1}{2} rd \equiv \delta_r$
- $[\widetilde{G}_c^{(n)}] = n[\widetilde{\phi}(x)] = n\left(\frac{d}{2} - 1\right)$
- $[G_c^{(n)}(\ldots, k_n)] = n[\phi(k)] = -n\left(\frac{d}{2} + 1\right)$
- $[G_c^{(n)}(\ldots, k_{n-1})] = d + n[\phi(k)] = d - n\left(\frac{d}{2} + 1\right)$
- $[\Gamma^{(n)}(\ldots, k_n)] = -nd - n[\phi(k)] = n - \frac{1}{2} nd$
- $[\Gamma^{(n)}(\ldots, k_{n-1})] = d + n - \frac{1}{2} nd = \delta_n$
- $\lambda_r$과 reduced vertex function $\Gamma^{(r)}$은 차원이 같다.

# homogeneous function

- $f$는 $g_i$ $(i = 1, \ldots)$의 함수이고, $[g_i] = \alpha_i$, $[f] = \Delta$라고 하자.
- 만약 모든 $g_i \mapsto b^{\alpha_i} g_i$로 변경한다면, $f \mapsto b^{\Delta} f$가 되어야 한다. 즉,

$$f(b^{\alpha_i} g_i) = b^{\Delta} f(g_i)$$

- 위와 같은 성질을 갖는 함수를 homogeneous function이라고 한다.
- 예: 3차원에서 $g_1 = k, g_2 = \mu^2, g_3 = \lambda, f(g_1, g_2, g_3) = g_3/(g_1^2 + g_2)$ (3차원에서 $[\lambda] = 1$) $[f] = 1 - 2 = -1$

$$f(bg_1, b^2 g_2, bg_3) = bg_3/(b^2 g_1^2 + b^2 g_2) = b^{-1} f(g_1, g_2, g_3)$$

- 이 성질은 나중에 renormalization group에서 중요한 역할을 함.
- 주의: **모든** 차원있는 변수가 변하여야 한다.
- 잘 못 사용한 예: $[\Gamma^{(2)}(k)] = 2$이므로, $\Gamma^{(2)}(bk) = b^2 \Gamma^{(2)}(k)$

# Renormalization at higher orders

- $\Gamma^{(E)}$의 $L$-loop diagram에 대한 (naive) 차원분석
  - $I$ internal lines with $L$-loops

$$\sim \Lambda^{Ld-2I}$$

  - $2I = 4V - E$, $I - V = L - 1$

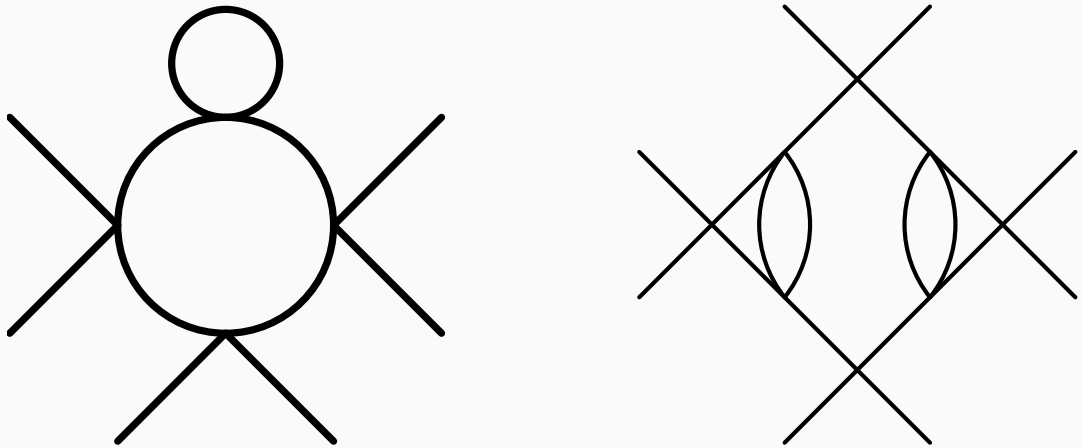
$$2I = 4L + E - 4, Ld - 2I = (d-4)L + 4 - E$$

$$\therefore \Lambda^{L(d-4)+4-E}$$

- $\Lambda$의 지수가 음수인 diagram을 superficially convergent diagram 이라고 부른다.
- $d < 4$이면 어떤 $L$이상이면 적분은 수렴.
- $d > 4$이면 $L$이 커질수록 발산하는 $E$가 많아짐.
- $d = 4$이면 발산정도는 $L$과 무관하고 $E = 2, 4$만 발산.

# Renormalization at higher orders (cont.)

- 그러나 superficially convergent diagram도 divergent subdiagram으로 인해 발산할 수 있음.



- 이런 이유로 앞 페이지의 분석을 'naive' power counting이라고 함.
- 그러나, 앞의 renormalization에 의해 이런 subdiagram들은 이미 처리가 되어 고려할 필요가 없음.
- primitively divergent diagrams: divergent diagrams without diverging subdiagram.
- $d = 4$: primitive divergence only for $n = 2$ and $4$.

# Renormalization at higher orders (cont.)

- 일반적인 경우에 대한 논의
- consider $\phi^r$ theory ($r = 3, 4, 5, \ldots$)

$$2I = rV - E = 2(V + L - 1) \Rightarrow I = \frac{r}{r-2}L + \frac{E-r}{r-2}$$

$$\Rightarrow dL - 2I = (d - d_c)L + \frac{r-E}{r-2}, \quad d_c \equiv \frac{2r}{r-2}.$$

- $d = d_c$ and $E \leq r$: primitive divergence
  - $d > d_c$ : $L$이 증가할수록 renormalization parameter가 증가 (nonrenormalizable theory)
  - $d < d_c$ : $L$이 증가할수록 primitive divergent diagram감소 (super-renormalizable)
  - $d = d_c$ : $L$의 개수와 무관 (renormalizable)
- $d_c$ is called the upper critical dimension.

# Renormalization at higher orders (cont.)

- $d_c$는 $\lambda_r$의 차원이 0이 되는 dimension이다.
- remind : $\delta_r = d + r - rd/2$.

| upper critical dimension | | | |
|---|---|---|---|
| $r$ | 3 | 4 | 6 |
| $d_c$ | 6 | 4 | 3 |

  - $d > d_c$ : non-renormalizable vs mean field
  - $d < d_c$ : super-renormalizable vs non mean-field
  - $d = d_c$ : renormalizable vs logarithmic corrections
- renormalizability는 momentum이 infinity에서의 거동과 관련이 있고, critical behavior는 momentum이 0 근처에서의 거동과 관련이 있다.

# Ginzburg criterion

- $m^2 \propto \chi^{-1} \propto |T - T_c|^\gamma$
- at the critical point $T_c$, $m^2 = 0$
- critical point $\mu_c^2$ and reduced temperature $\Delta\mu^2 \equiv \mu^2 - \mu_c^2$

$$\mu_c^2 = \mu^2\big|_{m^2=0} = \frac{\lambda}{2}\int_q \frac{1}{a^2 q^2} + O(\lambda^2)$$

$$\Delta\mu^2 = m^2\left(1 + \frac{\lambda}{2}\int_q \frac{1}{a^2 q^2 (a^2 q^2 + m^2)}\right) + O(\lambda^2)$$

- Landau theory ($m^2 \propto \mu^2$) will break down if the integral is dominant.
- $d > 4$ : $m^2 = 0$이어도 오른쪽 적분은 항상 유한함 (cutoff는 유한하다고 둠). Landau theory가 적용됨.

# Ginzburg criterion (cont.)

- $d \leq 4$이면, 오른쪽 적분은 $\lambda$가 아무리 작아도 $m^2 \to 0$으로 갈수록 발산을 함 (infrared divergence).
- $d < 4$에서 적분을 하면 (note 참고)

$$
\begin{aligned}
I &\equiv \frac{\lambda S_{d-1} m^{d-4}}{2(2\pi a)^d} \int_0^{a\Lambda/m} \frac{x^{d-1}\,dx}{x^2(x^2+1)} \\
&\approx \frac{\lambda S_{d-1} m^{d-4}}{2(2\pi a)^d} \int_0^{\infty} \frac{x^{d-3}}{x^2+1}\,dx = \frac{\lambda}{2^{d+1}} \frac{m^{d-4}}{(\pi a^2)^{d/2}} \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right).
\end{aligned}
$$

- $m^2 \ll \lambda^{2/(4-d)}$ 이면 Landau theory는 정확성을 잃게 된다. 이 영역을 critical region이라고 부른다.
- $d \leq 4$이면 mean field theory는 적용되지 않는다.
- upper critical dimension : mean field가 적용되지 않는 가장 높은 차원.

# UV and IR divergence

- ultraviolet (UV) divergence
  - 차원이 높으면 diagram의 적분은 $\Lambda$에 의존

$$\int_q \frac{1}{(a^2 q^2 + m^2)^2} \sim \Lambda^{d-4}.$$

  - UV divergence는 renormalization으로 해결.
- infrared (IR) divergence
  - $m = k = 0$이고 차원이 낮으면 적분은 발산

$$\int_q \frac{1}{q^4} \sim \int_a^\Lambda q^{d-5} dq \sim \left(\frac{1}{a}\right)^{4-d} \to \infty \text{ if } d \leq 4$$

  - 상전이는 $m = 0 (T = T_c)$, $k = 0$ 근처에서의 중요. 즉, IR divergence 가 중요하다.

# Relevant operators

- $V_I = \sum_r \int \lambda_r \phi^r$의 형태로 주어졌다고 하자.
- power counting of a diagram for $\Gamma^{(n)}$ of $L$-loop order

$$L = I - \sum_r n_r + 1, 2I = \sum_r r n_r - E,$$

$$\delta \equiv Ld - 2I = L(d-2) - 2\sum_r n_r + 2$$

  - $\delta$ is largest when $n_r$ with largest $r$ is largest : UV divergence.
  - $\delta$ is smallest when $n_r$ with smallest $r$ is largest : IR divergence.
- 가장 작은 $r$값의 critical dimension에서 보면, 이보다 큰 $r$을 갖는 항들은 IR divergence를 약하게 만든다.

# Relevant operators (cont.)

- relevant operator : IR divergence
- irrelevant opeator : no IR divergence
- 미분이 포함되는 경우($k^s\phi^r$ 형태)도 미분이 많아지면 더욱 irrelevant 해 진다.
- $\phi^4$ 이론에서는 $\phi^2$, $k^2\phi^2$, $\phi^4$ 만 relevant operator이다.
- relevant operator의 경우는 아무리 $\lambda_r$이 작아도 무시할 수 없다. (renormalization group)

# Rernomalization Group

# Normalization

- Normalization condition

$$
\begin{aligned}
m^2 &= \Gamma^{(2)}(\boldsymbol{k}=0;\alpha,\mu,\lambda,\Lambda),\\
a^2 &= \frac{\partial}{\partial k^2}\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{k}=0;\alpha,\mu,\lambda,\Lambda)\Big|_{k=\kappa},\\
g &= \Gamma^{(4)}(\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_2},\boldsymbol{k_3};\alpha,\mu,\lambda,\Lambda)\Big|_{\mathsf{SP}(\kappa)}.
\end{aligned}
$$

- Normalization condition at the critical point

$$
0 = \Gamma^{(2)}(\boldsymbol{k}=0;\alpha,\mu_c,\lambda,\Lambda).
$$

$a^2$과 $g$는 위와 같은 형태의 식 ($\mu=\mu_c$로 두면 됨).

# Renormalized vertex function

- free energy

$$W[J] = \ln \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{H}+J\circ\phi}, \quad \mathcal{H} = \int \frac{1}{2}\left(\alpha^2 k^2 + \mu^2\right)\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

- 치환 $\phi_R = Z^{-1/2}\phi$ ($\phi_R$ : renormalized field라고 부른다)

$$\mathcal{H}_R = \int \frac{1}{2}\left(\alpha_R^2 k^2 + \mu_R^2\right)\phi_R^2 + \frac{\lambda_R}{4!}\phi_R^4$$

- $\alpha_R^2 = Z\alpha^2$, $\mu_R^2 = Z\mu^2$, $\lambda_R^2 = Z^2\lambda$, $J_R = Z^{1/2}J$.
- Helmholtz and Gibbs free energy

$$W[J;\alpha,\mu,\lambda] = W_R[J_R;\alpha_R,\mu_R,\lambda_R] + \ J \text{ independent part}$$
$$\Gamma_R[\varphi_R] = J_R\circ\varphi_R + W_R = J\circ\varphi + W = \Gamma[\varphi] + \text{const}$$

# Renormalized vertex function (cont.)

- correlation and vertex functions

$$G_{cR}^{(n)} = \frac{\delta W_R}{\delta J_R} = Z^{-n/2} \frac{\delta W}{\delta J} = Z^{-n/2} G_c^{(n)},$$
$$\Gamma_R^{(n)} = \frac{\delta \Gamma_R}{\delta \varphi_R} Z^{n/2} \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi} = Z^{n/2} \Gamma^{(n)}.$$

- field renormalization and choice of $Z$

$$a^2 = \left. \frac{d\Gamma^{(2)}}{dk^2} \right|_{k=\kappa} \to a_R^2 = Z a^2$$

We choose $Z = a^{-2}$ $(a_R = 1)$ $\quad \boxed{\boldsymbol{\Gamma^{(n)} = a^n \Gamma_R^{(n)}}}$

- Since $m^2 = \Gamma^{(2)}(0)$, $g = \Gamma^{(4)}(\{\kappa\})$, we get $m_R^2 = \frac{m^2}{a^2}, \quad g_R = \frac{g}{a^4}$

# Renormalized vertex function (cont.)

- $\Gamma^{(n)}$: bare vertex function
- $\Gamma_R^{(n)}$ : renormalized vertex function
- $\Gamma^{(n)}$: $k$, $\Lambda$, bare parameter의 함수
- $\Gamma_R^{(n)}$ : $k$, $\kappa$, renormalized parameter의 함수 ($\Lambda \to \infty$)
- $a$는 $\kappa$, renormalized parameter (and $\Lambda$)의 함수
- $[g_R] = 4 - d = \varepsilon$이므로, $u \equiv g_R \kappa^{-\varepsilon}/(2\pi)^d$을 도입하면, $\Gamma_R$은 $k$, $\kappa$, $u$, $m_R$의 함수가 된다 ($\Lambda \to \infty$).
- $u$는 dimensionless expansion parameter가 된다.
- 이 장에서 $\Gamma^{(n)}$은 항상 reduced vertex function이다.
- $\mu^2 = \mu_c^2$이면 $m^2 = 0$ (혹은 $m^2 = 0$이면 $\mu^2 = \mu_c^2$)
- $\mu^2 = \mu_c^2$인 경우를 massless theory라고 부른다.

# General discussion about renormalized parameters

- massless theory 고려
- $\Gamma_R$, $a$, $g_R$은 $\kappa$에 따라 달라진다. 그러나 $\Gamma$는 $\kappa$와 무관하다.
- $\kappa = \kappa_1, \kappa_2$인 두 경우에 대하여 $\Gamma_R$을 고려하자.

$$\Gamma^{(n)} = a_1^n(g_1, \kappa_1)\Gamma_R^{(n)}(\boldsymbol{k}; g_1, \kappa_1) = a_2^n(g_2, \kappa_2)\Gamma_R^{(n)}(\boldsymbol{k}; g_2, \kappa_2)$$

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n \Gamma_R^{(n)}(\boldsymbol{k}; g_1, \kappa_1) = \Gamma_R^{(n)}(\boldsymbol{k}; g_2, \kappa_2)$$

- $a_i$, $g_i$는 $\kappa = \kappa_i$일 때의 $a$와 $g_R$을 의미한다.
- 두 $a$의 비를 $\mathfrak{A}$로 다음과 같이 정의하자. ($\mathfrak{A}$는 $\Lambda$-insensitive)

$$\mathfrak{A}(\kappa_1, g_1; \kappa_2, g_2) \equiv \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$$

# General discussion about renormalized parameters (cont.)

- $a_2$의 정의에 의해

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{\partial}{\partial k^2}\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{k}; g_2, \kappa_2)\bigg|_{k=\kappa_2} \\
&= \mathfrak{A}(\kappa_1, g_1; \kappa_2, g_2)\frac{\partial}{\partial k^2}\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{k}; g_1, \kappa_1)\bigg|_{k=\kappa_2}
\end{aligned}
$$

  이므로, $\mathfrak{A}$는 $\kappa_1$, $\kappa_2$, $g_1$ 만의 함수이다.

- 즉, $a_2 = a_2(g_1, \kappa_1, \kappa_2)$이다.
- $g_2$의 정의에 의해

$$
g_2 = \Gamma_R^{(4)}(\boldsymbol{k}; g_2, \kappa_2)\Big|_{\mathsf{SP}(\kappa_2)} = \mathfrak{A}^2\ \Gamma_R^{(4)}(\boldsymbol{k}; g_1, \kappa_1)\Big|_{\mathsf{SP}(\kappa_2)}
$$

  이므로, $g_2 = R(g_1, \kappa_1, \kappa_2)$이다.

- $u_i$를 $\kappa_i$에서의 $u$의 값이라고 하자.

# General discussion about renormalized parameters (cont.)

- $a_2$와 $u_2$는 $u_1, \kappa_1, \kappa_2$의 함수들인데, 이 둘 모두 dimensionless 이므로, $\kappa$가 단독으로 등장할 수 없다. 따라서, 이들은 $u_1$, $\kappa_2/\kappa_1$의 함수가 된다.

**$a$ and $u$**

$$a = a\left(u_1, \frac{\kappa_1}{\kappa}\right), u = u\left(u_1, \frac{\kappa_1}{\kappa}\right).$$

- $u$의 $\kappa_1$에서의 미분값은 다음으로 구한다.

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial \kappa}\bigg|_{\kappa=\kappa_1} = \beta(u_1)$$

- $\kappa_1$은 임의의 값이고 $[\beta] = 0$이므로, $\beta$는 $u$만의 함수임을 알 수 있다.
- $a$의 미분에 대하여도 같은 결론은 얻는다.

# Renormalization group (RG) idea at the critical point

- SP에서 $\kappa$일 때와 $\kappa/b$일 때의 $\Gamma_R^{(n)}$을 고려하자.
- $\Gamma^{(n)}$은 $\kappa$와 무관하므로 다음의 식이 성립한다.

$$a(1)^n \Gamma_R^{(n)}[\boldsymbol{k}; u(1), \kappa] = a(b)^n \Gamma_R^{(n)}[\boldsymbol{k}; u(b), \kappa/b]$$

- 편의상 $a$, $u$를 $b$의 함수로만 썼다.
- $[\Gamma_R^{(n)}] = \delta_n = n + d - nd/2$이고, $[k] = [\kappa] = 1$, $[u] = 0$이므로,

$$\Gamma_R^{(n)}[(b\boldsymbol{k})/b; u(b), \kappa/b] = b^{-\delta_n} \Gamma_R^{(n)}[b\boldsymbol{k}; u(b), \kappa]$$

$$\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{k}) = a(b)^n b^{-\delta_n} \Gamma_R^{(n)}[b\boldsymbol{k}; u(b), \kappa]$$

- 이제 $b\boldsymbol{k} \mapsto \boldsymbol{k}$라고 다시 쓰면,

$$\boldsymbol{\Gamma^{(n)}(k/b) = a(b)^n b^{-\delta_n} \Gamma_R^{(n)}[k; u(b), \kappa]}$$

# Renormalization group (RG) idea at the critical point (cont.)

- $u(b)$를 running coupling constant라고 부른다.
- 만약 $b \to \infty$일 때 $u(b) \to u^*, a(b) \to b^{\gamma_1^*/2}$라면,

$$\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{k}/b) \simeq b^{-\delta_n + n\gamma_1^*/2} \Gamma_R^{(n)}(\boldsymbol{k}; u^*, \kappa)$$

- 즉, $\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{k})$가 $\boldsymbol{k} \to 0$일 때의 거동을 알 수 있게 된다.
- e.g. critical exponents $\eta$
  - $\Gamma^{(2)}(k) \sim k^{2-\eta}$이므로, $\Gamma^{(2)}(k/b) \propto b^{-2+\eta}$
  - $\delta_2 = 2$이므로, $\eta = \gamma_1^*$가 된다.
- $b$를 키우는 것은 real space RG에서 coarse graining하는 것과 같은 맥락이다.
- Renormalization Group equation: $u(b)$, $a(b)$의 거동을 알려준다.

# Renormalization group equation

- Since $\Gamma^{(n)}$ does not have $\kappa$ dependence, we get

$$0 = \left\{ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \left[ \Gamma^{(n)} \left( k_i; \alpha, \lambda, \Lambda \right) \right] \right\}_{\alpha,\lambda,\Lambda} = \left\{ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \left[ a^n \Gamma_R^{(n)} \left( k_i; u, \kappa \right) \right] \right\}_{\alpha,\lambda,\Lambda}$$

- 위 식에서 $\kappa$로 편미분할 때 bare parameter는 고정한 채로 미분한다.
- $\Gamma_R^{(n)}$에 대한 미분방정식 **Renormalization Group equation**

$$0 = \left[ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{n}{2} \gamma_1 \right] \Gamma_R^{(n)}$$

$$\beta(u) = \left( \kappa \frac{\partial u}{\partial \kappa} \right)_{\alpha,\lambda,\Lambda}, \quad \gamma_1(u) = -2\kappa \left( \frac{\partial \ln a}{\partial \kappa} \right)_{\alpha,\lambda,\Lambda}.$$

- $\beta$, $\gamma_1$ :**flow function (Wilson function)**. $u$만의 함수이다.
- flow function을 알고 있으면, $\Gamma_R^{(n)}$을 구할 수 있다.

# Method of characteristics

> *Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them.* John von Neumann

- 다음과 같은 편미분 방정식을 푸는 일반적인 방식

$$a(x, y, \psi)\psi_x + b(x, y, \psi)\psi_y = c(x, y, \psi)$$

- RG 방정식과 비교하면,

$$x = \ln \kappa, a = 1, y = u, b = \beta(u), \psi = \Gamma_R^{(n)}, c = \frac{1}{2} n \gamma_1 \Gamma_R^{(n)}.$$

# Method of characteristics (cont.)

- Idea
  - 해를 안다고 가정. $f(x, y, z) \equiv \psi(x, y) - z = 0$인 3차원 곡면 고려.
  - 한 점 $(x, y, z)$에서 이 곡면에 수직인 vector는 다음과 같다.

$$\nabla f = (\psi_x, \psi_y, -1)$$

  - 따라서 $(a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$는 $\nabla f$와 수직이고, 모든 점에서 곡면에 접하는 vector field이다.
  - 즉, 이 곡면은 하나의 parameter $t$로 표현되는 여러 integral curve의 합집합으로 표현할 수 있다.
  - 이 곡선은 다음의 ODE를 만족한다. (이 곡선을 characteristic이라고 부른다)

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = c(x, y, z)$$

# Method of characteristics (cont.)

- 예 $\psi_t + x\psi_x = -2x^2\psi$, 초기조건$\psi(x, t = 0) = f(x)$
- characteristic

$$\frac{dx}{dt} = x \to x(t) = Ae^t \to A = xe^{-t},$$
$$\frac{dz}{dt} = -2x^2 z = -2A^2 e^{2t} z \to z(t) = Be^{-A^2(e^{2t}-1)}.$$

- From initial condition, $z(t = 0) = B = f(x(0)) = f(xe^{-t})$

$$\therefore \psi(x, t) = f(xe^{-t}) \exp\left[-x^2\left(1 - e^{-2t}\right)\right]$$

# Solution of the RG equation

- $\kappa = \kappa_0$ 일 때 $a(\kappa_0) = a_0$, $u(\kappa_0) = u_0$ 라고 하자.
- characteristics 방정식의 해를 $h(\kappa)$ 라고 하자.

$$\kappa \frac{\partial h(\kappa)}{\partial \kappa} = \beta[h(\kappa)], \text{ with } h(\kappa_0) = u_0$$

- renormalized vertex function (편의상 $k$를 제거)

$$\kappa \frac{d}{d\kappa} \Gamma_R^{(n)}[h(\kappa), \kappa] = \left\{ \frac{1}{2} n \gamma_1[h(\kappa)] \right\} \Gamma_R^{(n)}[h(\kappa), \kappa]$$

$$\ln \frac{\Gamma_R^{(n)}[h(\kappa), \kappa]}{\Gamma_R^{(n)}[h(\kappa_0), \kappa_0]} = \frac{1}{2} n \int_{\kappa_0}^{\kappa} \frac{d\kappa}{\kappa} \gamma_1(h(\kappa)) \equiv -n \ln \frac{\mathcal{A}(\kappa)}{a_0}$$

- solution

$$\Gamma_R^{(n)}[h(\kappa), \kappa] \mathcal{A}^n(\kappa) = \Gamma_R^{(n)}[u_0, \kappa_0] a_0^n.$$

# Solution of the RG equation (cont.)

- (original) vertex function (set $\kappa = \kappa_0/b$, 아래첨자 0제거)

$$\Gamma_R^{(n)}[h(\kappa/b), \kappa/b]\mathcal{A}^n(\kappa/b) = \Gamma_R^{(n)}[u, \kappa]a^n = \Gamma^{(n)}(k)$$

- $a(b) = \mathcal{A}(\kappa/b)$, $u(b) = h(\kappa/b)$ 라고 정의 ($\kappa$는 고정된 값으로 간주)
- 앞의 논의에 의해 $\Gamma^{(n)}(k/b) = b^{-\delta_n} a^n(b)\Gamma_R^{(n)}[k, u(b), \kappa_0]$

**flow equation**

$$b\frac{\partial u(b)}{\partial b} = -\beta[u(b)], \text{ with } u(1) = u$$
$$b\frac{\partial \ln a(b)}{\partial b} = \frac{1}{2}\gamma_1[u(b)], \text{ with } a(1) = a$$

- $\beta$, $\gamma_1$ 을 구하면 고비 현상을 분석할 수 있다.

# fixed points and critical exponents

- $\beta(u) = 0$의 해 $u^*$를 fixed point라고 부른다 (여러개 존재할 수 있다).
- $u = u^*$ 이면 $u(b) = u^*$, $\gamma_1[u(b)] = \gamma_1(u^*) \equiv \gamma_1^*$가 되어 $\eta = \gamma_1^*$ 이다.
- $\beta(u)$가 $u^*$ 근처에서 $\beta(u) = \zeta(u - u^*)$ 이면,

$$u(b) - u^* = e^{-\zeta \ln b}(u_0 - u^*)$$

  - $\zeta > 0 : u \to u^*$ as $b \to \infty$ (IR stable fixed point)
  - $\zeta < 0 : u \to u^*$ as $b \to 0$ (UV stable fixed point)
- $u = u^*$ 에서 $\beta$의 기울기가 중요하다.
- 특히, $\zeta > 0$이면 $u_0$의 값과 상관없이 large length (small momentum) scale physics는 똑 같아진다. (**universality**)

# fixed points and critical exponents (cont.)

- $\gamma_1$ 이 $u = u^*$ 근처에서 다음과 같다고 하자

$$\gamma_1 = \gamma_1^* + \gamma'(u - u^*)$$

- Solution of $a(b)$

$$2 \ln a = \int_1^b \frac{db}{b} \gamma_1[u(b)] = \int_{u_0}^{u} \frac{\gamma_1(u')}{\beta(u')} du' \approx \gamma_1^* \ln b + \frac{\gamma'}{\zeta}(u - u^*)$$

$$a(b) = b^{\gamma_1^*/2} e^{\gamma'(u-u^*)/\zeta}$$

- $u \to u^*$ 이면, $a(b) \simeq b^{\gamma_1^*/2}$

# fixed points and critical exponents (cont.)

- $\beta(u) = \zeta(u - u^*)^2$ 형태인 경우 ($\zeta > 0$, $u_0 > u^*$ 라고 가정)

$$\frac{du}{d\ln b} = -\zeta(u - u^*)^2,$$

$$\ln b = \frac{1}{\zeta}\left[\frac{1}{u - u^*} - \frac{1}{u_0 - u^*}\right] \approx \frac{1}{\zeta}\frac{1}{u - u^*}$$

$$2\ln a(b) = \int_{u_0}^{u} \frac{\gamma_1(u')}{\beta(u')}du' = \gamma_1^* \ln b + \frac{\gamma'}{\zeta}\ln\frac{u - u*}{u_0 - u^*}$$

$$\approx \gamma_1^* \ln b - \frac{\gamma'}{\zeta}\ln\ln b \to a(b) = b^{\gamma_1^*/2}(\ln b)^{-\gamma'/(2\zeta)}$$

- log-correction이 등장한다.
- 보통 upper critical dimension에서 $\beta(u) = u^2$의 형태를 갖게 되어 $\gamma_1^* = \eta = 0$이고 log-correction이 존재한다.

# critical exponent $\delta$

- $J(x) = J_0$ 일 때 $\widetilde{\phi}(x) = \phi_0$ 라고 하자. $J_0(\phi_0) = aJ_R(\phi_{0R})$ 이므로,

$$aJ_R(\phi_{0R}, u^*, \kappa) = a(b)J_R(\phi_{0R}(b), u^*, \kappa/b)$$

- $\phi_{0R} = a\phi_0$ 이므로, $\phi_{0R}(b) = a(b)\phi_{0R}/a$ 이다.
- $a$는 field $J$와 무관한 양이므로, $J_0 \propto \phi_0^\delta$ 이면 $J_R \propto \phi_{0R}^\delta$ 이다.
- $u = u^*$ 라고 하자.
- $u = u^*$ 이므로 $a(b) = ab^{\gamma_1^*/2}$ 이므로

$$J_R(\phi_{0R}, u^*, \kappa) = b^{\gamma_1^*/2} J_R(b^{\gamma_1^*/2}\phi_{0R}, u^*, \kappa/b)$$

# critical exponent $\delta$ (cont.)

- $[\phi_0] = (d-2)/2$, $[J_0] = (2+d)/2$이므로

$$b^{\gamma_1^*/2} J_R\left(b^{(d-2+\gamma_1^*)/2}\frac{\phi_{0R}}{b^{(d-2)/2}}, u^*, \frac{\kappa}{b}\right)$$
$$= b^{-(d+2-\gamma_1^*)/2} J_R\left(b^{(d-2+\gamma_1^*)/2}\phi_{0R}, u^*, \kappa\right) = J_R(\phi_{0R}, u^*, \kappa)$$

- $s = b^{(d-2+\gamma_1^*)/2}$라고 하면,

$$J_R(s\phi_{0R}) = s^{(2+d-\gamma_1^*)/((d-2+\gamma_1^*)} J_R(\phi_{0R})$$

- 따라서 $\delta = \dfrac{d+2-\gamma_1^*}{d-2+\gamma_1^*} = \dfrac{d+2-\eta}{d-2+\eta}$

# Wilson functions

- Property of a partial derivative

$$\beta(u) = \kappa \frac{\partial u}{\partial \kappa}\bigg|_{\lambda,\Lambda} = -\frac{\kappa(\partial\lambda/\partial\kappa)_{u,\Lambda}}{(\partial\lambda/\partial u)_{\kappa,\Lambda}}$$

- Dimensional analysis

$$\lambda = \kappa^{\varepsilon} u_0(u, \kappa/\Lambda)$$

- Since $\beta$ is $\Lambda$-insensitive, we can neglect contribution from $\Lambda$

$$\kappa \frac{\partial \lambda}{\partial \kappa}\bigg|_{u,\Lambda} = \varepsilon\lambda$$

# Wilson functions (cont.)

- Hence

$$\beta(u) = -\varepsilon\lambda\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)_{\kappa}\right]^{-1} = -\varepsilon\left(\frac{\partial \ln u_0}{\partial u}\right)^{-1}$$

- Since $u_0 = u(1 + a_1 u + a_2 u^2)$, $a^{-2}(u) = 1 + b_2 u^2$ ($a_1 > 0$),

$$\begin{aligned}\beta(u) &= -\varepsilon\left\{\frac{\partial \ln\left[u(1 + a_1 u + a_2 u^2)\right]}{\partial u}\right\}^{-1} \\ &= -\varepsilon u\left[1 - a_1 u + 2(a_1^2 - a_2)u^2 + O(u^3)\right], \\ \gamma_1(u) &= \beta(u)\frac{\partial a^{-2}}{\partial u} = -\varepsilon u\left[2b_2 u + (3b_3 - 2b_2 a_1)u^2 + O(u^3)\right]\end{aligned}$$

- (IR stable) fixed point
  - $d > 4$ ($\varepsilon < 0$) : $u* = 0$ (Gaussian fixed point: Landau theory)
  - $d < 4$ ($\varepsilon < 0$) : $u* \approx 1/a_1 \propto \varepsilon$ (Wilson-Fisher fixed point)

# RG for $T \neq T_c$ (schematics)

- modified Hamiltonian at the critical point (tilde 기호를 뺐음)

$$\mathcal{H}_\tau = \int_x \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} \left[\mu_c^2 - \tau(x)\right] \phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

- $\tau(x) = \tau_0$ 이면 $\mathcal{H}_\tau$ 는 $T \neq T_c$ 에서의 $\mathcal{H}$ 가 된다.
- $\tau(x)$ 를 도입하는 것을 $\phi^2$ insertion이라고도 부른다.
- $\phi^2$ 를 composite operator라고도 부른다.
- 많은 장론책에서는 시작부터 modified Hamiltonian을 다룬다.
- partition function and free energy

$$Z[J,\tau] \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-\mathcal{H}_\tau + \int_x J(x)\phi(x)\right)$$

$$W[J,\tau] \equiv \ln Z, \quad W[J,\tau] + \Gamma[\varphi,\tau] = \int_x J(x)\varphi(x)$$

# RG for $T \neq T_c$ (schematics) (cont.)

- correlation functions

$$G^{(n,\ell)}(x_n; y_\ell; \tau) \equiv \frac{1}{Z}\frac{\delta^n}{\delta J(x_i)^n}\frac{\delta^\ell}{\delta \tau(y_i)^\ell} Z[J,\tau]\Big|_{J=0}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^\ell \left\langle \prod_{i=1}^{m} \phi(x_i) \prod_{j=1}^{\ell} \phi^2(y_j) \right\rangle$$
$$G_c^{(n,\ell)}(x_n; y_\ell; \tau) \equiv \frac{\delta^n}{\delta J(x_i)^n}\frac{\delta^\ell}{\delta \tau(y_i)^\ell} W[J,\tau]\Big|_{J=0}.$$

- $G^{(n,\ell)}(x; y)$는 $G^{(n,\ell)}(x; y; \tau = 0)$을 의미한다.
- vertex function $\Gamma^{(n,\ell)}(x; y; \tau)$ : $G_c^{(n,\ell)}(x; y; \tau = 0)$의 1PI part
- Fourier transformation of the composite filed

$$\phi_2(p) \equiv \int_x e^{-ipx}\phi^2(x) = \int_q \phi(q)\phi(p-q) \neq \phi(p)^2$$

# RG for $T \neq T_c$ (schematics) (cont.)

- reduced vertex function ($\boldsymbol{k}$중 하나를 제거하고 씀)

$$\Gamma^{(n,\ell)}(\ldots, \boldsymbol{k_n}; \ldots, \boldsymbol{p_\ell}) = \Gamma^{(n,\ell)}(\ldots, \boldsymbol{k_{n-1}}; \ldots, \boldsymbol{p_\ell}) \times \times \delta_k \left( \sum_i k_i + \sum_j p_j \right)$$

- Note that

$$G_c^{(n,\ell+1)}(x; \ldots, y_\ell, y_{\ell+1}; \tau) = \frac{\delta}{\delta \tau(y_{\ell+1})} G_c^{(n,\ell)}(x; \ldots, y_\ell; \tau)$$

$$\Gamma^{(n,\ell+1)}(x; \ldots, y_\ell, y_{\ell+1}; \tau) = \frac{\delta}{\delta \tau(y_{\ell+1})} \Gamma^{(n,\ell)}(x; \ldots, y_\ell; \tau)$$

# RG for $T \neq T_c$ (schematics) (cont.)

- Taylor expansion

$$\Gamma^{(n)}(x;\tau) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_{y}^{1\sim\ell} \frac{1}{\ell!} \left( \prod_{i=1}^{\ell} \tau(y_i) \right) \Gamma^{(n,\ell)}(x;\ldots,y_\ell)$$

- In particular, if $\tau(y) = \tau_0$,

$$\Gamma^{(n)}(x;\tau_0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\tau_0^\ell}{\ell!} \int_{y}^{1\sim\ell} \Gamma^{(n,\ell)}(x;\ldots,y_\ell)$$

- momentum space (reduced vertex function)

$$\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{k};\tau_0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\tau_0^\ell}{\ell!} \Gamma^{(n,\ell)}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{p}=0)$$

# RG for $T \neq T_c$ (schematics) (cont.)

- $T \neq T_c$에서의 vertex function을 massless theory에서 계산한 vertex function으로 구할 수 있다. massless theory면 충분.
- Normalization (massless) $Z_2 = \left[\Gamma^{(2,1)}(\boldsymbol{\kappa}; \boldsymbol{\kappa})\right]^{-1}$
- renormalized vertex function

$$\Gamma^{(n,\ell)}(;;\lambda,\Lambda) = a^n Z_2^{-\ell} \Gamma_R^{(n,\ell)}(;;u,\kappa)$$

- renormalized $\Gamma^{(n)}$ for nonzero $\tau_0$

$$\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{k};\tau_0) = \sum_\ell \frac{\tau_0^\ell}{\ell!} a^n Z_2^{-\ell} \Gamma_R^{(n,\ell)} \equiv a^n \Gamma_R^{(n)}(\boldsymbol{k};\tau_R,u;\kappa)$$

where $\tau_R \equiv \tau_0 / Z_2$.

# RG for $T \neq T_c$ (schematics) (cont.)

- RG equation

$$0 = \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \left[ a^n Z_2^{-\ell} \Gamma_R^{(n,\ell)} \right]_{\lambda,\Lambda}$$

$$0 = \left[ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{n}{2} \gamma_1 + \ell \gamma_2(u) \right] \Gamma_R^{(n,\ell)}(; u, \kappa),$$

  where

$$\gamma_2 \equiv -\frac{\partial \ln Z_2}{\partial \ln \kappa} = -\beta(u) \frac{\partial \ln Z_2}{\partial u}$$

- Since $\dfrac{\partial \ln \tau_R}{\partial \ln \kappa} = \gamma_2$, we get

$$0 = \left[ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{n}{2} \gamma_1 + \gamma_2(u) \frac{\partial}{\partial \ln \tau_R} \right] \Gamma_R^{(n)}(\boldsymbol{k}; \tau_R, u, \kappa).$$

# RG for $T \neq T_c$ (schematics) (cont.)

- Solution along $\kappa(b) = \kappa_0/b$ ($t_0 = \tau_R(\kappa_0)$, $u_0 = h(\kappa_0)$)

$$\begin{aligned}\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{k}; \lambda, \tau_0) &= a_0^n \Gamma_R^{(n)}(\boldsymbol{k}, t_0, u_0, \kappa_0) \\ &= \mathcal{A}^n \left(\frac{\kappa_0}{b}\right) \Gamma_R^{(n)} \left[b\boldsymbol{k}/b, b^2 t\left(\frac{\kappa_0}{b}\right)/b^2, h\left(\frac{\kappa_0}{b}\right), \frac{\kappa_0}{b}\right] \\ &= a^n(b) b^{-\delta_n} \Gamma_R^{(n)} \left(b\boldsymbol{k}, b^2 \tau_R(b), u(b), \kappa_0\right),\end{aligned}$$

where

$$a(b) \equiv \mathcal{A}(\kappa_0/b), \quad \tau_R(b) \equiv t(\kappa_0/b), \quad u(b) \equiv h(\kappa/b).$$

$$\frac{\partial u(b)}{\partial \ln b} = -\beta[u(b)],$$

$$\frac{\partial \ln a}{\partial \ln b} = \frac{1}{2}\gamma_1[u(b)], \frac{\partial \ln t_R(b)}{\partial \ln b} = -\gamma_2[u(b)]$$

- Note that we have used $[t] = 2$ and $[\Gamma^{(n)}] = \delta_n$.

# RG for $T \neq T_c$ (schematics) (cont.)

- vertex function at the (IR stable) fixed point

$$\begin{aligned}\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{k}/b; \lambda, \tau_0) &= a_0^n \Gamma_R^{(n)}(\boldsymbol{k}/b; t_0, u^*, \kappa_0) \\ &= a_0^n b^{-\delta_n + n\gamma_1^*/2} \Gamma_R^{(n)}(\boldsymbol{k}; b^{2-\gamma_2^*} t_0, u^*, \kappa_0)\end{aligned}$$

- Since $Z_2$ and $a_0$ are calculated using massless theory, we can set $t_0 \propto \tau_0$.

# Critical exponents

- correlation length

$$\xi^2 = \frac{\int r^2 G_c^{(2)}(r)}{\int G_c^{(2)}(r)} = -\frac{\partial}{\partial k^2} \ln G_c^{(2)}(\boldsymbol{k})\Big|_{k=0} = \frac{\partial}{\partial k^2} \ln \Gamma^{(2)}(\boldsymbol{k})\Big|_{k=0}$$

이므로,

$$\xi^2 = \frac{\partial}{\partial k^2} \ln \Gamma_R^{(2)}(b\boldsymbol{k}, b^{2-\gamma_2^*} t_0)\Big|_{k=0} \equiv b^2 F(b^{2-\gamma_2^*} t_0)$$

$\xi^2 \sim \tau_0^{-2\nu}$ 이므로 $F(x) \sim x^{-2\nu}$ 이다. 따라서,

$$\tau_0^{-2\nu} \propto b^{2-2\nu(2-\gamma_2^*)} t_0^{-2\nu} \therefore \nu = \frac{1}{2-\gamma_2^*}$$

# Critical exponents (cont.)

- critical exponent $\gamma$

$$\Gamma^{(2)}(\boldsymbol{k}=0;\tau_0)=\tau_0^{\gamma}$$

$$\tau_0^{\gamma} \propto b^{-2+\gamma_1^*}\left(b^{2-\gamma_2^*}t_0\right)^{\gamma} \propto b^{-2+\gamma_1^*+\gamma(2-\gamma_2^*)}\tau_0^{\gamma}$$

$b$는 임의의 수이므로, $\gamma=(2-\gamma_1^*)/(2-\gamma_2^*)=(2-\eta)\nu$

# Critical exponents (cont.)

- critical exponent $\beta$
  $t_0 \neq 0$인 경우에 (fixed point에서) $J_R$은 다음과 같다.

$$b^{-(d+2-\gamma_1^*)/2} J_R\left(b^{(d-2+\gamma_1^*)/2}\phi_{0R}, b^{2-\gamma_2^*} t_0\right) = J_R\left(\phi_{0R}, t_0\right)$$

  $J_0 = 0$이면 $J_R = 0$이므로, 임의의 $b$에 대하여

$$J_R\left(b^{(d-2+\gamma_1^*)/2}\phi_{0R}, b^{2-\gamma_2^*} t_0\right) = 0$$

  따라서 $t_0^{-(d-2+\gamma_1^*)/(2(2-\gamma_2^*)}\phi_{0R} = \text{const.}$

$$\beta = \frac{d-2+\gamma_1^*}{2(2-\gamma_2^*)} = \frac{1}{2}\nu(d-2+\eta)$$

# Computation of Critical Exponents

# Dimensional regularization

- 지금까지 cutoff regularization을 논의함.
- renormalizaton 과정에서 $\Lambda$ sensitivity는 다음과 같은 형태로 제거하였음.

$$I = \lim_{\Lambda \to \infty} \int_p [f_1(p) - f_2(p)] \equiv I_1 - I_2$$

- dimensional regularization: 보통 차원이 낮으면 $\Lambda$-insesitive 해지는 것을 감안하여 $I_1$과 $I_2$가 $\Lambda \to \infty$에서 잘 정의되는 $d$ 차원에서 계산하고, 그 차원에서 $I$를 계산한다. $d$를 복소수라고 간주하고 $I$를 복소수 $d$에 대한 analytic function이라고 생각하여, analytics continuation을 통해 우리가 원하는 차원에서 $I$가 잘 정의되도록 만들려고 함 (cutoff 계산보다 편함)
- NB: 어떤 영역에서 같은 값을 갖는 두 analytic function은 모든 복소 공간에서 같다.

# Dimensional regularization (cont.)

- analytic continuation 예
  - $\Gamma(z)$: $\Re(z) > 0$에서만 정의된 다음 함수의 analytic continuation

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

  - 연습문제: moment generating function

$$G(k) \equiv \langle e^{ikX} \rangle = \int e^{ikx} P(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\langle X^n \rangle}_{\equiv m_n} \frac{(ik)^n}{n!},$$

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} G(k) dk$$

만약 $m_n = n!$이면, $P(x)$는 무엇인가?

# Dimensional regularization (cont.)

- 적분 예 (Beta 함수에 대한 note 참고)

$$
\begin{aligned}
I_1(m) &\equiv \int_0^\infty \frac{d^d x}{x^2+m^2} = S_{d-1}\int_0^\infty \frac{x^{d-1}\,dx}{x^2+m^2} \\
&= S_{d-1} m^{d-2}\int_0^\infty \frac{t^{d-1}\,dt}{t^2+1} \\
&= m^{d-2}\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\frac{\Gamma(1-d/2)\Gamma(d/2)}{2\Gamma(1)} = m^{d-2}\pi^{d/2}\Gamma(1-d/2)
\end{aligned}
$$

- $\Gamma$는 analytic 함수이므로 analytic continuation이 완성됨.
- $d=2,4,6$에서 $\Gamma(0),\Gamma(-1),\Gamma(-2)$는 UV divergence를 의미함.

# Dimensional regularization (cont.)

- dimensional regularization의 세 요건
  1. $\int_q F(q+k) = \int_q F(q)$
  2. $\int_q F(\lambda q) = \lambda^{-d} \int_q F(q)$
  3. $\int_{pq} f(q)g(p) = \int_q f(q) \int_p g(p)$
- 위의 두번째 조건으로 부터 다음의 결론을 얻는다.

$$\int_p p^{2n} = \lambda^{-2n} \int_p (\lambda p)^{2n} = \lambda^{-d-2n} \int_p p^{2n} = 0.$$

- NB : dimensional regularization에서는 (최소한 어떤 복소수 $d$에 대하여) 모든 적분이 가능하다고 간주한다.

# Dimensional regularization (cont.)

- consistency check I

$$\int_p \frac{1}{p^2} = \lim_{m\to 0} \int_p \frac{1}{p^2+m^2} = \lim_{m\to 0} m^{d-2} C = 0.$$

- consistency check II

$$\int_p \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}\right] = -\pi^{d/2}\Gamma(1-d/2) = \int_p \frac{1}{p^2(p^2+1)}$$
$$= \frac{2\pi^{d/2}}{d-2}\Gamma(2-d/2) = \frac{2\pi^{d/2}}{d-2}(1-d/2)\Gamma(1-d/2)$$

- Note that $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

# Calculation technique: Feynman parameterization

- Typical integral

$$\int_p \frac{1}{(p^2+2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p}+c^2)^b} = \int_p \frac{1}{(p^2+c^2-x^2)^b}$$
$$= \int_p \frac{(c^2-x^2)^{d/2-b}}{(p^2+1)^b} = \frac{S_{d-1}}{(2\pi)^d}(c^2-x^2)^{d/2-b}\int \frac{x^{d-1}\,dx}{(x^2+1)^b}$$
$$= \frac{S_{d-1}}{(2\pi)^d}(c^2-p^2)^{d/2-b}\frac{\Gamma(b-d/2)\Gamma(d/2)}{2\Gamma(b)}$$

- 앞에서 dimensionless coupling constant $u$를 정의할 때, $(2\pi)^d$만 나누었는데, 보통 $S_{d-1}$까지 곱하여 정의한다.

$$u = \frac{S_{d-1}}{(2\pi)^d} g_R \kappa^{-\varepsilon}$$

# Calculation technique: Feynman parameterization (cont.)

- Feynman parameterization

$$a^{-b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty t^{b-1} e^{-at} dt,$$

$$\frac{1}{a_1^{b_1} a_2^{b_2}} = \frac{1}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)} \int_0^\infty dt_1\, dt_2\, t_1^{b_1-1} t_2^{b_2-1} e^{-a_1 t_1 - a_2 t_2}.$$

- 치환 $t_1 = s u_1$, $t_2 = s u_2$ $(u_1 + u_2 = 1)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1^{b_1} a_2^{b_2}} =& \frac{1}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)} \int_0^1 du u^{b_1-1}(1-u)^{b_2-1} \times \\
& \times \int_0^\infty ds e^{-(a_1 u_1 + a_2 - a_2 u)s} s^{b_1+b_2-1} \\
=& \frac{\Gamma(b_1+b_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)} \int_0^1 du \frac{u^{b_1-1}(1-u)^{b_2-1}}{(a_1 u + a_2 - a_2 u)^{b_1+b_2}}
\end{aligned}$$

# Calculation technique: Feynman parameterization (cont.)

- In general,

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^{b_i}} = \frac{\Gamma(\sum_i b_i)}{\prod_i \Gamma(b_i)} \int_0^1 du_1 \cdots du_n \delta\left(\sum_i u_i - 1\right) \frac{\prod_i u_i^{b_i - 1}}{(\sum_i a_i u_i)^{\sum_i b_i}}$$

- Example

$$\begin{aligned} J(k) &= \int_0^\infty \frac{d^d x}{x^2 (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k})^2} \\ &= \int_0^1 du_1\, du_2 \delta(u_1 + u_2 - 1) \int \frac{d^d x}{(x^2 u_1 + (x-k)^2 u_2)^2} \\ &= \int_0^1 du \int \frac{d^d x}{(x^2 - 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{k} u + k^2 u)^2} \\ &= \pi^{d/2} k^{-\varepsilon} \Gamma(\varepsilon/2) \Gamma(1 - \varepsilon/2) / \Gamma(2 - \varepsilon). \end{aligned}$$

# $\varepsilon$ expansion

- diagram을 $\varepsilon = 4 - d$에 대한 Laurent series로 표현.
- $u$를 $\varepsilon$으로 전개한다. $k^{\varepsilon} = e^{\varepsilon \ln k} \approx 1 + \varepsilon \ln k$를 사용.
- $\Gamma$ 함수의 pole을 다음과 같이 구한다.

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(1+x)}{x} \approx \frac{1}{x}, \quad \Gamma(-1+x) = \frac{\Gamma(x)}{-1+x} \approx -\frac{1}{x}$$

- higher order correction은 다음을 이용한다.

$$\Gamma(1+x) \approx \Gamma(1) + \Gamma'(1)x, \quad \Gamma'(1) = \int_0^\infty \ln t e^{-t} dt = -\gamma \approx -0.5772$$

  $\gamma$ : Euler-Mascheroni 상수 $\equiv \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} k^{-1} - \ln n \right)$
- minimal subtraction scheme : diagram에서 $\varepsilon$-pole만 고려한다.
- $\beta$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ 함수를 계산할 수 있다.