16차 통계물리 겨울학교: ϕ^4 field theory and the renormalization group

박수찬

가톨릭대학교

겨울학교 강의에 수반되는 부수적인 계산들을 정리한 노트입니다.

I. ROUTE TO A CONTINUOUS FIELD

A. Gaussian 적분

실수 대칭 양의 정부호 (real symmetric positive-definite) 행렬 $\mathcal{K}$에 대하여 다음 적분을 고려한다.

$$I = \int \left(\prod_{i=1}^{N} d\phi_i \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{ij} \phi_i \mathcal{K}_{ij} \phi_j \right).$$

$O^T_{ki}\mathcal{K}_{ij}O_{jl} = d_k \delta_{kl}$로 대각화가 된다고 하고 ($d_i > 0$), $\phi_i = O_{ij}\psi_j$로 치환적분을 하면 (Jacobian은 $\det O = 1$),

$$\sum_{ij} \phi_i \mathcal{K}_{ij} \phi_j = \sum_{ijkl} \psi_k O^T_{ki} \mathcal{K}_{ij} O_{jl} \psi_l = \sum_k d_k \psi_k^2$$

이므로,

$$I = \prod_i \int d\psi_i \exp\left(-\frac{1}{2} \psi_i^2 d_i \right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\det \mathcal{K}}}.$$

여기에서 $\det \mathcal{K} = \det O^T \mathcal{K} O = \prod_i d_i$를 이용하였다.

B. n-dimensional solid angle

n차원 vector $\boldsymbol{r}$을 cartesian coordinate를 이용하여 다음과 같이 쓰기로 하자.

$$\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{r}_k \equiv \sum_{i=1}^{k} x_i \boldsymbol{e}_i.$$

여기에서 $\boldsymbol{e}_i$는 i번 째 축 방향의 단위벡터이고, 논의의 편의상 $\boldsymbol{r}_k$ vector를 정의하였다. $\boldsymbol{r}_k$와 $\boldsymbol{e}_k$가 이루는 각을 θ_{k-2}라고 하면 ($3 \le k \le n$, $0 \le \theta_{k-2} \le \pi$),

$$x_k = \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{r}_k = |\boldsymbol{r}_k| \cos\theta_{k-2}$$

이다. $|\boldsymbol{r}_k|^2 = x_k^2 + |\boldsymbol{r}_{k-1}|^2$이므로, $|\boldsymbol{r}_{k-1}| = |\boldsymbol{r}_k| \sin\theta_{k-2}$이다. $\boldsymbol{r}_2$는 $x_1 - x_2$ 평면상의 vector이므로 $\boldsymbol{r}_2$와 x_2가 이루는 각을 θ_0라 하고 $0 \le \theta_0 < 2\pi$로 두면, $x_2 = |\boldsymbol{r}_2| \cos\theta_0$, $x_1 = |\boldsymbol{r}_2| \sin\theta_0$ 가 된다.

이를 정리하면 다음과 같다. ($k = 2, 3, \ldots, n-1$)

$$\begin{aligned} x_n &= r\cos\theta_{n-2}, \\ x_k &= r \left[\prod_{l=k-1}^{n-2} \sin\theta_l \right] \cos\theta_{k-2} \equiv y_k \sin\theta_{n-2}, \\ x_1 &= r \left[\prod_{l=1}^{n-2} \sin\theta_l \right] \sin\theta_0 \equiv y_0 \sin\theta_{n-2}. \end{aligned}$$

위에서 새롭게 정의된 y_k는 $(n-1)$차원 (부분)공간에서 크기가 r인 vector의 k성분으로 간주 할 수 있다.

이제 Jacobian

$$J_n \equiv \left| \frac{\partial(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)}{\partial(r, \theta_{n-2}, \ldots, \theta_0)} \right|$$

을 계산하자. $k < n-2$에 대하여 $\dfrac{\partial x_n}{\partial \theta_k} = 0$이므로, 행렬식의 정의에 의해 J_n은 다음과 같이 쓸 수 있다. (직접 확인하고 싶으면 $n \times n$ 행렬을 한 번 써보기를 제안한다.)

$$J_n = \frac{\partial x_n}{\partial r} \left| \frac{\partial(x_{n-1}, \ldots)}{\partial(\theta_{n-2}, \ldots)} \right| - \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-2}} \left| \frac{\partial(x_{n-1}, \ldots)}{\partial(r, \theta_{n-3}, \ldots)} \right|.$$

$k < n$인 x_k를 θ_{n-2}로 미분하면 $y_k \cos\theta_{n-2}$가 된다. 이와 함께 아래의 성질

$$y_k = r\frac{\partial y_k}{\partial r}, \quad \det(\alpha_i M_{ij}) = \left(\prod_i \alpha_i \right) \det M_{ij}$$

을 이용하면, 다음 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(x_{n-1}, \ldots, x_1)}{\partial(\theta_{n-2}, \ldots, \theta_0)} \right| &= r\cos\theta_{n-2} \sin^{n-2}\theta_{n-2} J_{n-1}, \\ J_{n-1} &\equiv \left| \frac{\partial(y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_1)}{\partial(r, \theta_{n-3}, \ldots, \theta_0)} \right|. \end{aligned}$$

위에서 J_{n-1}은 $(n-1)$차원에서의 Jacobian이다. 따라서 $J_n = r\sin^{n-2}\theta_{n-2} J_{n-1}$이 됨을 알 수 있다. $J_2 = r$이므로,

$$J_n = r^{n-1} \prod_{k=0}^{n-2} \sin^k \theta_k \Rightarrow d\Omega_n = \prod_{k=0}^{n-2} \sin^k \theta_k d\theta_k$$

가 된다. ($0 \le \theta_0 < 2\pi$, 나머지 θ들은 0에서 π 범위)

C. Beta function

이 절에서는 아래에 정의된 Beta함수를 논의한다.

$$B(a,b) \equiv \int_0^1 dx x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

우선 두 감마함수의 곱을 생각한다.

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty dt_1 t_1^{a-1} e^{-t_1} \int_0^\infty dt_2 t_2^{b-1} e^{-t_2} \\ &= \int_0^\infty dt_1 dt_2 t_1^{a-1} t_2^{b-1} e^{-t_1-t_2}.\end{aligned}$$

치환 적분 : $t_1 = t(1-x), t_2 = tx$ $(0 \le t < \infty, 0 \le x \le 1)$,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(t,x)} = \begin{vmatrix} 1-x & -t \\ x & t \end{vmatrix} = t \Longrightarrow \\ &\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty dt t^{a+b-1} e^{-t} \int_0^1 dx x^{a-1}(1-x)^{b-1} \\ &\qquad = \Gamma(a+b)B(a,b), \\ &\therefore B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.\end{aligned}$$

D. $\mathcal{K}_{ij}^{-1}$ 계산

d차원 격자점의 벡터를 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$라고 쓰고, Dirac의 bracket notation을 이용하여 $\mathcal{K}$를 다음과 같이 쓴다.

$$\langle \boldsymbol{x}|\mathcal{K}|\boldsymbol{y}\rangle = 2K\left[\alpha\delta_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\left(\delta_{x_j,y_j+1} + \delta_{x_j,y_j-1}\right)\right].$$

단, $x_i = 1, 2, \ldots, N$이고, 편의상 N은 홀수라고 하자.

Translational invariance를 이용하기 위해 Fourier 변환된 state vector $|\boldsymbol{k}\rangle$을 다음과 같이 도입하자.

$$|\boldsymbol{k}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N^d}}\sum_{\boldsymbol{x}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{x}\rangle, \quad \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d).$$

위에서 $k_i = 2\pi n_i/N$이고 $n_i = -(N-1)/2, \ldots, (N-1)/2$인 정수이다.

$\mathcal{L} = \mathcal{K}/(2K)$라고 정의하고 $\mathcal{L}$의 성질만 분석하면 충분하다. $|\boldsymbol{k}\rangle$은 $\mathcal{L}$의 eigenstate임을 다음과 같이 확인할 수 있다.

$$\mathcal{L}|\boldsymbol{k}\rangle = \sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}}}{\sqrt{N^d}}|\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x}|\mathcal{L}|\boldsymbol{y}\rangle = \left[\alpha + \sum_{j=1}^{d}\cos(k_j)\right]|\boldsymbol{k}\rangle.$$

이로부터 $\alpha > d$이어야 $\mathcal{L}$ (즉, $\mathcal{K}$)는 양의 정부호 행렬이 됨을 알 수 있다. 따라서,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \equiv \langle\boldsymbol{x}|\mathcal{L}^{-1}|\boldsymbol{y}\rangle &= \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{k}\rangle\langle\boldsymbol{k}|\boldsymbol{y}\rangle}{\alpha + \sum_{j=1}^d \cos(k_j)} \\ &= \frac{1}{N^d}\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}}{\alpha + \sum_{j=1}^d \cos(k_j)}.\end{aligned}$$

$N \to \infty$이면 위 합은 아래의 리만적분이 된다.

$$I_d(\boldsymbol{r}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{\alpha + \sum_{j=1}^d \cos(k_j)}.$$

단, $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$이다. $A = \alpha + \sum_{j=2}^{d-1}\cos k_j > 1$이라고 하고 k_1에 대하여 먼저 적분을 하자. 편의상 $x = r_1$은 자연수라고 두자.

$$\begin{aligned}I_1(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ikx}}{A + \cos k} dk \qquad (1) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{A+1+(A-1)t^2}\left(\frac{1+it}{1-it}\right)^x dt \\ &= \frac{1}{2\pi i(A-1)}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i}{(t+i\zeta)(t-i\zeta)}\left(\frac{1+it}{1-it}\right)^x dt.\end{aligned}$$

위에서 $\zeta = \sqrt{(A+1)/(A-1)}$이고, 첫번째 줄에서 두 번째 줄로 넘어갈 때 다음과 같은 치환적분을 하였다.

$$t = \tan\left(\frac{k}{2}\right), \; dk = \frac{2dt}{1+t^2}, \; e^{ik} = \frac{1+it}{1-it}.$$

적분 내의 함수는 복소평면에서 $-i$, $-i\zeta$, $i\zeta$의 세개의 pole을 가지고 있는데, 복소평면에서 $t = i\zeta$를 포함하는 닫힌 무한 반원인 contour를 고려하면 (Fig. 1참조) 적분은 다음과 같이 간단히 계산된다.

$$\begin{aligned}I_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{A^2-1}}\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^x \\ &= \frac{1}{\sqrt{A^2-1}}\left(-\frac{1}{A+\sqrt{A^2-1}}\right)^x = \frac{(-1)^x e^{-\kappa x}}{\sqrt{A^2-1}}.\end{aligned}$$

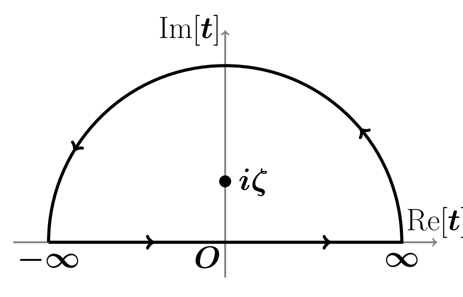

FIG. 1. Eq. (1)의 적분을 위한 contour.

위 식에서$\kappa \equiv \ln\left(A + \sqrt{A^2 - 1}\right) = \cosh^{-1}(A)$이고, $A > 1$이므로 $\kappa > 0$임을 알 수 있다. 정의에 의해 $I_1(-x) = I_1(x)$이므로 임의의 정수 x에 대하여 $I_1(x) = I_1(|x|)$ 가 된다.

이제 d차원 적분을 고려하자. $\boldsymbol{r}$의 성분중, 가장 큰 절대값을 갖는 성분을 x라고 하고, 이 성분에 수직인 성분을 $\boldsymbol{r}_\perp$이라고 하자. 그러면 I_d는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
|I_d(\boldsymbol{r})| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^{d-1}k_\perp}{(2\pi)^{d-1}} e^{i\boldsymbol{k}_\perp \cdot \boldsymbol{r}_\perp} I_1(x) \right| \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^{d-1}k_\perp}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{-\kappa|x|}}{\sqrt{A^2-1}}.
\end{aligned}
$$

$A = \alpha + \sum_{j=1}^{d-1} \cos k_j > \alpha - d + 1 \equiv A_0$, $\kappa > \cosh^{-1}(A_0)$이고, $|\boldsymbol{r}|^2 = |\boldsymbol{r}_\perp|^2 + x^2 \le x^2 d$이므로,

$$
|I_d(\boldsymbol{r})| \le \frac{e^{-\kappa_0|\boldsymbol{r}|}}{\sqrt{A_0^2 - 1}} \qquad \left(\kappa_0 \equiv \frac{\cosh^{-1}(A_0)}{\sqrt{d}}\right)
$$

가 성립되어 $\mathcal{K}^{-1}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$는 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$가 큰 경우에 지수적으로 감소함을 알 수 있다.

II. DIAGRAMATIC PERTURBATION THEORY

A. $\Delta(\boldsymbol{r})$ 계산

$\int_0^\infty dt e^{-yt} = 1/y$를 이용하고, $\boldsymbol{k}$의 각 성분에 대한 gaussian 적분을 하면, $\Delta(\boldsymbol{r})$은 다음과 같이 된다.

$$
\begin{aligned}
\Delta(\boldsymbol{r}) &= \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{\alpha^2k^2 + \mu^2} \\
&= \int_0^\infty dt \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \exp\left(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \alpha^2tk^2 - \mu^2t\right) \\
&= \int_0^\infty \frac{dt}{(4\pi\alpha^2t)^{d/2}} \exp\left[-\mu^2t - \frac{r^2}{4\alpha^2t}\right].
\end{aligned}
$$

$t = re^x/(2\alpha\mu)$로 치환하면 ($y \equiv \mu r/\alpha, \nu \equiv \frac{d}{2} - 1$),

$$
\begin{aligned}
\Delta(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu^{d-2}y^{-\nu}}{2\alpha^d(2\pi)^{d/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\nu x} \exp(-y\cosh x) \\
&= \frac{\mu^{d-2}y^{-\nu}}{\alpha^d(2\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \cosh(\nu x) \exp\left(-y\cosh x\right) dx \\
&= \frac{\mu^{d-2}}{\alpha^d(2\pi)^{d/2}} \frac{K_\nu(y)}{y^\nu}.
\end{aligned}
$$

위에서 $e^{-\nu x} = \cosh(\nu x) - \sinh(\nu x)$이고 sinh을 포함한 적분은 0이 됨을 이용하였다. 또한, $K_\nu(y)$는 modified Bessel function of the second kind로서

$$
K_\nu(y) = \int_0^\infty \cosh(\nu t) \exp(-y\cosh t) dt = K_{-\nu}(y)
$$

를 만족한다. $y \gg 1$에 대하여 $K_\nu(y) \sim e^{-y}y^{-1/2}$이고, $y \ll 1$인 경우, $K_\nu(y) \sim y^{-|\nu|}$이므로,

$$
\Delta(\boldsymbol{r}) \sim \begin{cases} e^{-\mu|\boldsymbol{r}|/\alpha} r^{-(d-1)/2}, & \mu r \gg 1, \\ r^{-(d-2)}, & \mu r \ll 1 \text{ and } d \ge 2, \\ \text{const}, & \mu r \ll 1 \text{ and } d < 2, \end{cases}
$$

이다.

B. $Z_n > n!$ for $n \ge 2$

만약 어떤 자연수 n에 대하여 $Z_n > \frac{1}{3}n!$이면

$$
\begin{aligned}
\frac{Z_{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{(4n+4)!}{(n+1)!^2 16^{n+1}(2n+2)!} \\
&= \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{16(n+1)^2(2n+2)(2n+1)} \frac{Z_n}{n!} \\
&= \frac{16n^2 + 16n + 3}{4n^2 + 8n + 4} \frac{Z_n}{n!} \\
&= \left[4 - \frac{16n - 3}{4(n+1)^2}\right] \frac{Z_n}{n!}
\end{aligned}
$$

이다. $16n - 3 - 4(n+1)^2 = -4(n-1)^2 - 3 < -3$이므로,

$$
\frac{16n - 3}{4(n+1)^2} < 1 - \frac{3}{4(n+1)^2} < 1.
$$

따라서

$$
\frac{Z_{n+1}}{(n+1)!} > 3\frac{Z_n}{n!} > 1.
$$

$Z_1 = \frac{3}{4} > \frac{1}{3}$이므로, $n \ge 2$에 대하여 $Z_n > n!$이다.

직접 해결하는 방법은 다음과 같다. 자연수 n에 대하여

$$
\frac{1}{12n+1} < \ln\left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}\right) < \frac{1}{12n}
$$

이 성립함[H. Robbins, Amer. Math. Montly **62**, 26 (1955)]을 이용하면,

$$
\frac{Z_n}{n!} > \frac{4^n}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left[-\frac{216n + 5}{24n(48n+1)}\right]
$$

을 얻을 수 있다. 이 부등식의 우변은 n에 대한 증가함수인데, $n = 2$일 때부터 1보다 큼을 (수치적으로) 알 수 있다.

C. Ising model on a complete graph

N개의 site로 이루어진 complete graph에서의 Ising model은 다음의 Hamiltonian으로 쓸 수 있다. ($K = \beta J$)

$$-\beta H = \frac{K}{2L}\sum_{ij} s_i s_j + h\sum_i s_i.$$

$s_i^2 = 1$이므로, interaction 항의 s_i^2 성분은 물리에 영향을 주지 않는다. $M = \sum_i s_i$라고 하면, partition function은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
Z =& \mathrm{Tr} e^{-\beta H} = \sqrt{\frac{NK}{2\pi}}\mathrm{Tr}\times \\
&\times \int d\phi \exp\left[-\frac{NK}{2}\left(\phi - \frac{M}{N}\right)^2 + \frac{KM^2}{2N} + hM\right] \\
=& \sqrt{\frac{NK}{2\pi}}\int d\phi \exp\left(-\frac{NK}{2}\phi^2\right)\mathrm{Tr} e^{(K\phi+h)M} \\
=& 2^N\sqrt{\frac{NK}{2\pi}}\int d\phi \exp\left[-\frac{NK}{2}\phi^2 + N\ln\cosh(K\phi+h)\right] \\
=& \sqrt{\frac{NK}{2\pi}}\int d\phi \exp\left[-NKf(\phi)\right].
\end{aligned}$$

위에서

$$f(\phi) \equiv \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{K}\ln\cosh(K\phi+h)$$

이다. N이 아주 큰 경우, $f(\phi)$가 최솟값이 되는 값 근처에서의 적분이 가장 큰 기여를 하게된다. $f(\phi)$가 최소가 되는 ϕ를 m이라고 하면, m은 다음을 만족해야 한다.

$$0 = \left.\frac{df}{d\phi}\right|_{\phi=m} = m - \tanh(Km+h). \tag{2}$$

$|\tanh| < 1$이므로 $|m| < 1$임을 알 수 있다.

만약 Eq.(2)의 해가 여러개가 있다면, 그 중에서 $f(m)$이 최소가 되는 경우만 고려하면 되고, 만약 최소가 되는 값이 여러개가 있다면 각 부분에서의 적분에 대한 기여를 더하면 된다.

$\phi = m$에서 최솟값이 되어야 하므로,

$$A \equiv f''(m) = 1 - K\mathrm{sech}^2(Km+h) = 1 - K + Km^2$$

은 양수이어야 한다. $K < 1$이면, $|m| < 1$이므로, A는 항상 양수이다. 그러나 $K > 1$이면, Eq. (2)의 어떤 해는 A가 음수가 될 수도 있다. A가 음수가 되기 위한 조건은 $|m| < \sqrt{(K-1)/K}$이므로, $|m| > \sqrt{(K-1)/K}$인 해만 고려하면 된다.

$\phi = m$근처에서 $f(\phi)$를 전개하면 (단, $x = \phi - m$)

$$f(\phi) \approx f(m) + \frac{A}{2}x^2$$

이다. 따라서 Z는 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$Z \approx e^{-NKf(m)}\sqrt{\frac{NK}{2\pi}}\int dx e^{-ANKx^2/2} = \frac{e^{-NKf(m)}}{\sqrt{A}}.$$

따라서 free energy는

$$\frac{F}{NJ} \equiv -\frac{\ln Z}{NK} \approx f(m) - \frac{1}{2NK}\ln A$$

이 된다. 열역학적 극한에서 mean magnetization은

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\frac{\partial \ln Z}{\partial h} &= -\frac{\partial Kf(m)}{\partial h} - K\cancel{\frac{\partial f(m)}{\partial m}}\frac{\partial m}{\partial h} \\
&= \tanh(Km+h) = m
\end{aligned}$$

이 된다. Finite size correction을 더 정밀하게 계산하고 싶으면 $f(\phi)$를 higher order까지 전개하여 perturbative하게 계산하면 된다.

D. $\Gamma^{(n)}$과 $G_c^{(n)}$의 관계

φ는 다음으로 정의된다.

$$\varphi(x) \equiv \frac{\delta}{\delta J(x)}W[J]. \tag{3}$$

이 식으로부터 $J(x) = J[x,\varphi]$의 functional로 쓸 수 있다고 가정하자. 이제 Γ를 $\varphi(x)$로 functional derivative를 하면

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)} = \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\int_x \varphi(x)J(x) - \frac{\delta W[J]}{\delta\varphi(x)}. \tag{4}$$

다음의 chain rule

$$D_\varphi(x) \equiv \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} = \int_y \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)}\frac{\delta}{\delta J(y)} \tag{5}$$

과 Eq. (3)을 이용하면 다음을 얻게된다.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\int_y \varphi(y)J(y) &= J(x) + \int_y \varphi(y)\frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)} \\
&= J(x) + \int_y \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)}\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} = J(x) + \frac{\delta W[J]}{\delta\varphi(x)}.
\end{aligned}$$

위 식을 Eq. (4)에 넣으면 다음의 결론을 얻게 된다.

$$D_\varphi(x)\Gamma = J(x). \tag{6}$$

φ의 정의식 Eq. (3), chain rule Eq. (5), Eq. (6)를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\delta(x-y) &= \frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)} = \frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \\ &= \int_z \frac{\delta J(z)}{\delta\varphi(y)}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z)\delta J(x)} \\ &= \int_z \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z)\delta J(x)} \\ &\equiv \int_z \Gamma^{(2)}(y,z)G^{(2)}_{Jc}(z,x).\end{aligned} \tag{7}$$

따라서, $\Gamma^{(2)}_\varphi$ 는 $G^{(2)}_{Jc}$ 의 역행렬이다. $G^{(2)}_{Jc}$ 는 connected correlation function으로서 실수 대칭 양의 정부호 행렬이므로, $\Gamma^{(2)}$ 역시 실수 대칭 양의 정부호 행렬이다. 특히, $J=0$인 경우가 주 관심의 대상인데, 이 때 Eq. (3)의 해가 여러 개 나온다면, 그 중 Γ의 최솟값을 주는 φ_0가 Eq. (3)의 올바른 해이다.

wavevector space에서도 $\Gamma^{(2)}$ 와 $G^{(2)}_{Jc}$ 는 역행렬 관계를 갖는다. 특히, $J=0$인 경우에 translation invariance에 의해

$$\Gamma^{(2)}(k)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = \frac{1}{G^{(2)}_c(k)}$$

를 얻는다.

$\Gamma^{(3)}$ 와 G_c의 관계를 찾기 위해서 Eq. (7)에 $\varphi(w)$로 미분을 해보자.

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\delta}{\delta\varphi(w)}\int_z \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z)\delta J(x)} \\ &= \int_z \frac{\delta^3\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(w)\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(z)\delta J(x)} \\ &+ \int_{zu} \frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)}\frac{\delta J(u)}{\delta\varphi(w)}\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(u)\delta J(z)\delta J(x)}.\end{aligned}$$

위에서 chain rule을 사용하였다. J를 φ로 미분하면 $\Gamma^{(2)}$가 되므로,

$$\begin{aligned}0 &= \int_z \Gamma^{(3)}(w,y,z)G^{(2)}_{Jc}(z,x) \\ &+ \int_{zu} \Gamma^{(2)}(y,z)\Gamma^{(2)}(u,w)G^{(3)}_{Jc}(z,x,y).\end{aligned}$$

$\Gamma^{(2)}$는 $G^{(2)}_{Jc}$ 의 역행렬이므로, 윗 식에 $G^{(2)}_{Jc}(v,w)G^{(2)}_{Jc}(a,y)$를 곱하고 a, v로 적분을 하면

$$\begin{aligned}G^{(3)}_{Jc}(x,y,z) = -\int_{u,v,w} &\Gamma^{(3)}(u,v,w) \\ &G^{(2)}_{Jc}(x,u)G^{(2)}_{Jc}(y,v)G^{(2)}_{Jc}(z,w)\end{aligned}$$

를 얻는다. 즉, $\Gamma^{(3)}$는 1PI diagram에 -1을 곱한 식이 된다. 윗 식에 $J=0$을 넣어도 관계식은 성립한다.

E. $\Gamma^{(2p)} = 0$ for $p \geq 3$ in the tree approximation

$p-1$개의 vertex가 필요한데, 각 vertex는 최소한 하나의 다른 vertex와 연결되어야 한다. 하지만, connected이면서 닫힌 면이 나오지 않으려면 2개의 vertex는 1개만 연결되어야 하고, 나머지 vertex는 2개씩 다른 vertex와 연결되어야 한다. 그러면 $2(p-3)+2 = 2p-4$개의 ϕ들이 모든 vertex를 연결하는 하나의 직선을 만들게 된다. 남는 ϕ의 개수는 $4(p-1)-(2p-4) = 2p$이므로, 이 들은 external momentum과 연결되어야만 한다. 즉, 1PI는 만들어지지 않는다.

III. RENORMALIZATION

A. $\Delta A(k)$

$\Delta A(\boldsymbol{k})$는 Λ^{2d-8}의 행동을 보임을 보이려고 한다. 우선

$$A(\boldsymbol{k}) \equiv \int_{pq} \Delta(\boldsymbol{p})\Delta(\boldsymbol{q})\Delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{Q})$$

는 $\boldsymbol{k}$의 크기만의 함수임을 보이겠다. 이제 임의의 회전변환 O에 대하여 $A(O\boldsymbol{k})$를 고려하자. 위 적분에서 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q} \mapsto O\boldsymbol{p}, O\boldsymbol{q}$로 치환하면, $\Delta(O\boldsymbol{k}-\boldsymbol{Q}) \mapsto \Delta[O(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{Q})]$가 되고 (note $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$), 임의의 vector $\boldsymbol{k}$에 대하여 $\Delta(O\boldsymbol{k}) = \Delta(\boldsymbol{k})$이므로, $A(O\boldsymbol{k}) = A(\boldsymbol{k}) = A(|\boldsymbol{k}|)$임을 알 수 있다. 따라서, $\boldsymbol{k}$의 방향에 대한 A의 평균을 계산하여도 같은 결과가 된다. 즉,

$$A(|\boldsymbol{k}|) = \frac{1}{S_{d-1}}\int d\Omega_k A(\boldsymbol{k})$$

이다.

이제 $\Delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{Q})$의 $\boldsymbol{k}$의 방향에 대한 평균을 계산하자.

우선 $k \equiv |\boldsymbol{k}|$를 작은 값이라고 하고 전개를 하면

$$\Delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{Q}) = \frac{1}{\alpha^2 Q^2 + \mu^2 - 2\alpha^2 \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{Q} + \alpha^2 k^2}$$
$$\approx \frac{1}{\alpha^2 Q^2 + \mu^2}\left[1 + \alpha^2 \frac{2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{Q} - k^2}{\alpha^2 Q^2 + \mu^2} + \left(2\frac{\alpha^2 \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{Q}}{\alpha^2 Q^2 + \mu^2}\right)^2\right]$$

을 얻는다. 방향에 대한 평균은 대칭성에 의해

$$\int d\Omega_k \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{Q} = 0, \int d\Omega_k (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{Q})^2 = \frac{1}{d}k^2 Q^2$$

이므로,

$$\int d\Delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{Q})\Omega_k - \Delta(\boldsymbol{Q})$$
$$\approx \alpha^2 k^2 \Delta(Q)^2 \left[\frac{4}{d}\alpha^2 Q^2 \Delta(Q) - 1\right].$$

따라서

$$\frac{\Delta A(\boldsymbol{k})}{\alpha^2 k^2} = \int_{pq} \Delta(\boldsymbol{p})\Delta(\boldsymbol{q})\Delta(\boldsymbol{Q})^2 \left[\frac{4}{d}\alpha^2 Q^2 \Delta(Q) - 1\right]$$
$$\sim \Lambda^{2d-8}.$$

B. λ와 g의 관계

$\lambda = g + ag^2 + bg^3 + O(g^4)$이라고 하면,

$$g \approx g + ag^2 + bg^3 - \frac{3}{2}(g^2 + 2ag^3)I_1 + \frac{3}{4}g^3 I_1^2 + 3g^3 I_2$$
$$\approx g + \left(a - \frac{3}{2}I_1\right)g^2 + \left(b - 3aI_1 + \frac{3}{4}I_1^2 + 3I_2\right)g^3.$$

따라서

$$a = \frac{3}{2}I_1, \quad b = 3aI_1 - \frac{3}{4}I_1^2 - 3I_2 = \frac{15}{4}I_1^2 - 3I_2,$$
$$\lambda = g + \frac{3}{2}I_1 g^2 + \left(\frac{15}{4}I_1^2 - 3I_2\right)g^3 + O(\hbar^3).$$

C. Another integral form of the beta function

우선 다음의 적분을 고려하자.

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2+1)^b}dx.$$

$x^2 + 1 = 1/y$로 치환.

$$x = \sqrt{\frac{1-y}{y}}, \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{4y^3(1-y)}},$$
$$I(a,b) = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{b-(a/2)-(3/2)}(1-y)^{(a/2)-1/2}dy$$
$$= \frac{1}{2\Gamma(b)}\Gamma\left(b - \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

D. Integral for the Ginzburg criterion

위의 계산 결과를 이용한다 $(a = d-3, b = 1)$.

$$I \equiv S_{d-1}\int_0^\infty \frac{x^{d-3}}{x^2+1}dx$$
$$= S_{d-1}\frac{1}{2\Gamma(1)}\Gamma\left(1 - \frac{d-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)$$
$$= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\frac{\Gamma(2-d/2)\Gamma(-1+d/2)}{2} = \frac{2\pi^{d/2}}{d-2}\Gamma(2-d/2).$$